向量空间与特征值

一. 向量空间 V

1. 定义： V 是由一组向量 $|a\rangle, |b\rangle, \cdots$
数 $a, b, c \cdots \in \mathbb{F}$ $\Rightarrow V(\mathbb{F})$

运算法则：

一. 加法 $+: V \times V \longrightarrow V$

二 数乘 $\cdot: \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$

三. (i) 封闭

(ii) 交换律 $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle \in V$

(iii) 结合律 $(|v\rangle + |w\rangle) + |a\rangle = |v\rangle + (|w\rangle + |a\rangle)$

(iv) 存在单位元 $\exists |0\rangle \in V$, s.t. $|0\rangle + |v\rangle = |v\rangle$

(v) 存在相反数 $\exists |-v\rangle \in V$, s.t. $|-v\rangle + |v\rangle = |0\rangle$

四. (i) 封闭性

(ii) $\alpha(|v\rangle + |w\rangle) = \alpha|v\rangle + \alpha|w\rangle$

(iii) $(\alpha+\beta)|v\rangle = \alpha|v\rangle + \beta|v\rangle$

(iv) $\alpha(\beta|v\rangle) = (\alpha\cdot\beta)|v\rangle$

(v) $|v\rangle = 1\cdot|v\rangle$, $\forall |v\rangle \in V$

2. 例子：

① $\mathbb{R}(\mathbb{R})$

② $\mathbb{C}(\mathbb{C})$

③ $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ×

④ $\mathbb{C}^{n\times m}(\mathbb{C})$

⑤ $f(x)$, $x \in [a,b]$
$f(a) = f(b) = 0$

3. 性质.

1. $|0\rangle$ 唯一
2. $|-v\rangle$ 唯一
3. $0\cdot|\psi\rangle = |0\rangle$
4. $\alpha|0\rangle = |0\rangle$
5. $|f\rangle + |v\rangle = |f\rangle$
$\Rightarrow |v\rangle = |0\rangle$
6. $|-v\rangle = (-1)\cdot|v\rangle$

二、向量的线性组合.

$|v\rangle = \alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_k|v_k\rangle$

$|v\rangle$ 是 $|v_1\rangle \cdots |v_k\rangle$ 的线性组合

线性独立

$\alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_n|v_n\rangle = 0$

$\Rightarrow a_i = 0$ ，$i = 1, \cdots, n$.

性质：有一个 $|0\rangle$ 则一定相关.

维数和基底，

最多只能 n 个线性独立的向量，$\dim V = n$.

$V^n(\mathbb{F}) \hookrightarrow V^n(\mathbb{F})$ 的基底

$\dim \mathbb{R}(\mathbb{R}) = 1$

[定理] $|v_1\rangle \cdots |v_n\rangle$ 是一组基底

则任一向量 $|\psi\rangle \in V^n(\mathbb{F})$

① 可以写成 $|v_1\rangle \cdots |v_n\rangle$ 线性组合

② 组合系数唯一

证明：① $\dim V = n$

$|\psi\rangle, |v_1\rangle, \cdots, |v_n\rangle$ 线性相关

$\alpha|\psi\rangle + \alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_n|v_n\rangle = 0$

(i) $\alpha = 0$ ，不可能

(ii) $\alpha \neq 0$ ，$|\psi\rangle = -\frac{\alpha_1}{\alpha}|v_1\rangle + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha}|v_n\rangle$

② 反设有 $c_1', \cdots, c_n'$

$$|\psi\rangle = c_1|v_1\rangle + \cdots + c_n|v_n\rangle$$

$$|\psi\rangle = c_1'|v_1\rangle + \cdots + c_n'|v_n\rangle$$

$$\Rightarrow \quad c_i = c_i' \,, \ \forall i$$

$$\begin{cases} \text{不完备} \\ \text{完备} \begin{cases} \text{过完备} \\ \text{恰完备} \quad (\text{满秩}) \end{cases} \end{cases}$$

$\forall |v\rangle \in V(\mathbb{F})$，都可以写出线性组合.

例： $V^3(\mathbb{R})$

一、$\{e_x\}$

二、$\{e_x, e_y, e_z\}$

三、$\{e_x, e_y, e_z, e_x - e_z\}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{cases} (a, b, c, 0) \\ (a-1, b, c+1, 1) \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

向量 $\longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$ 表示

$$V^N(\mathbb{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^{M} a_i |v_i\rangle \,\middle|\, a_i \in \mathbb{F} \right\}$$

例. $\left\{ \sum_{i=1}^{M} a_i |v_i\rangle \,\middle|\, a_i \in \mathbb{F} \right\}$ 是向量空间.

三. 算符:

对于一个 $V^n(\mathbb{F})$ 中任一向量 $\longrightarrow$ $V^n(\mathbb{F})$ 中另一向量的映射.

$$\hat{A}: |v\rangle \longrightarrow |w\rangle$$

$$|w\rangle = \hat{A}|v\rangle$$

1. 相等与运算. $\hat{A}$, $\hat{B}$ 在 $V^n(\mathbb{F})$

$\forall |v\rangle \in V^n(\mathbb{F})$, $\hat{A}|v\rangle = \hat{B}|v\rangle \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$.

反身. 相互. 传递

2. $(\hat{A}+\hat{B})|v\rangle = \hat{A}|v\rangle + \hat{B}|v\rangle$

$$\hat{A}+\hat{B} = \hat{B}+\hat{A}$$

$$(\hat{A}+\hat{B})+\hat{C} = \hat{A}+(\hat{B}+\hat{C})$$

$$(\hat{A}\cdot\hat{B})|v\rangle = \hat{A}(\hat{B}|v\rangle)$$

$$\hat{A}_1\cdots\cdots\hat{A}_n|v\rangle = \hat{A}_1(\cdots(\hat{A}_n|v\rangle))$$

$$(\hat{A}\cdot\hat{B})\cdot\hat{C} = \hat{A}\cdot(\hat{B}\cdot\hat{C})$$

$$\alpha\hat{A}|v\rangle = \alpha(\hat{A}|v\rangle)$$

$$\hat{A}|v\rangle = |v\rangle \Rightarrow \hat{A} = \hat{1}$$

性质: 1. $\hat{A}\cdot\hat{1} = \hat{1}\cdot\hat{A}$

2. $\hat{1}+\cdots+\hat{1} = n\hat{1}$.

零算符 $\hat{A}|v\rangle = |0\rangle \Rightarrow \hat{A} = \hat{0}$

性质 1. $\hat{A}+\hat{0}=\hat{0}+\hat{A}$

2. $\hat{0}\cdot\hat{A}=\hat{0}$

3. $\alpha\cdot\hat{0}=\hat{0}$

4. $0\cdot\hat{A}=\hat{0}$

定义. $\hat{A}-\hat{B}=\hat{A}+(-1)\cdot\hat{B}$

性质：

(1) $(\hat{B}+\hat{C})\cdot\hat{A}=\hat{B}\cdot\hat{A}+\hat{C}\cdot\hat{A}$

$$(\hat{B}+\hat{C})\cdot\hat{A}|v\rangle$$
$$=\hat{B}(\hat{A}|v\rangle)+\hat{C}(\hat{A}|v\rangle)$$
$$=(\hat{B}\cdot\hat{A})|v\rangle+(\hat{C}\cdot\hat{A})|v\rangle$$
$$=(\hat{B}\cdot\hat{A}+\hat{C}\cdot\hat{A})|v\rangle$$

(2) $\hat{A}\cdot(\hat{B}+\hat{C})\overset{?}{=}\hat{A}\cdot\hat{B}+\hat{A}\cdot\hat{C}$ (线性算符)

$$(\hat{A}\cdot(\hat{B}+\hat{C}))|v\rangle$$
$$=\hat{A}((\hat{B}+\hat{C})|v\rangle)$$
$$=\hat{A}(\hat{B}|v\rangle+\hat{C}|v\rangle)$$

线性算符

$$=\hat{A}\cdot(\hat{B}|v\rangle)+\hat{A}\cdot(\hat{C}|v\rangle)$$
$$=(\hat{A}\cdot\hat{B}+\hat{A}\cdot\hat{C})|v\rangle.$$

单射. $\hat{A}|v_1\rangle\neq\hat{A}|v_2\rangle$ $\forall|v_1\rangle\neq|v_2\rangle$

满射 $\forall|w\rangle\in V^0(\mathbb{F})$, $\exists|v\rangle\in V^0(\mathbb{F})$. s.t. $\hat{A}|v\rangle=|w\rangle$

3. 逆算符. $\hat{A}$

$$\hat{A}\cdot\hat{B}=\hat{B}\cdot\hat{A}=\hat{1}\ ,\quad \hat{B}=\hat{A}^{-1}$$

性质：若一算符可逆，则为双射，反之亦然。

证明：$\Leftarrow$ ✓

$\Rightarrow$ (不是双射 $\Rightarrow$ 不可逆) ✓

性质 $(\hat{A}^{-1})^{-1}=\hat{A}$

线性算符

$$\hat{A}(\alpha|v\rangle+\beta|w\rangle)=\alpha\hat{A}|v\rangle+\beta\hat{A}|w\rangle$$

性质：①

$$\begin{aligned}&\hat{A}\cdot\hat{B}(\alpha|v\rangle+\beta|w\rangle)\\ =\ &\hat{A}(\hat{B}\alpha|v\rangle+\hat{B}\beta|w\rangle)\\ =\ &\alpha\hat{A}\cdot(\hat{B}|v\rangle)+\beta\hat{A}(\hat{B}|w\rangle)\\ =\ &\alpha\hat{A}\cdot\hat{B}|v\rangle+\beta\hat{A}\cdot\hat{B}|w\rangle\end{aligned}$$

② 数乘

③ $\hat{A}$ 是线性，则 $\hat{A}^{-1}$ 也是

$$|v\rangle=\hat{A}|f\rangle$$
$$|w\rangle=\hat{A}|g\rangle$$

$$\begin{aligned}&\hat{A}^{-1}(\alpha|v\rangle+\beta|w\rangle)\\ =\ &\hat{A}^{-1}(\alpha\hat{A}\underline{|f\rangle}+\beta\hat{A}|g\rangle)\\ =\ &\hat{A}^{-1}(\hat{A}(\alpha|f\rangle+\beta|g\rangle))\\ =\ &\hat{1}(\alpha|f\rangle+\beta|g\rangle)=\alpha A^{-1}|v\rangle+\beta\hat{A}^{-1}|w\rangle.\end{aligned}$$

④ $\hat{A}$ 是线性，则 $\hat{A}|0\rangle = |0\rangle$，

$\hat{A}|0\rangle \neq |0\rangle$，则 $\hat{A}$ 不是线性.

$A(|v\rangle + |-v\rangle) = A|v\rangle + (-1)A|v\rangle = |0\rangle$

⑤ $\hat{A}$ 是线性，基底 $\Rightarrow$ 任一向量

⑥ $\hat{0}$，$\hat{1}$ 都是线性.

定理. 当且仅当线性 $\hat{A}|v\rangle = |0\rangle$ 之唯一解为 $|v\rangle = |0\rangle$，

则 $\hat{A}$ 可逆.

证明：$\Leftarrow$

$$\hat{A}^{-1}(\hat{A}|v\rangle) = \hat{A}^{-1}|0\rangle = |0\rangle$$

$$= \hat{1}|v\rangle$$

$$= |v\rangle$$

$\Rightarrow$ $V(F)$ 的一组基 $\{|u_i\rangle\}$

$$\sum_i a_i \hat{A}|u_i\rangle = |0\rangle$$

$$\shortparallel$$

$$\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i|u_i\rangle\right)$$

$\therefore \sum_i a_i|u_i\rangle = |0\rangle$

$a_i = 0$

$\Rightarrow$ $\hat{A}|u_1\rangle \cdots \hat{A}|u_n\rangle$ 是 $V^n(F)$ 一组基.

$\therefore$ 满射.

反设. $\hat{A}|u\rangle = \hat{A}|v\rangle$ $\Rightarrow$ $|u\rangle = |v\rangle$

$\hat{A}(|u\rangle - |v\rangle) = |0\rangle$

$\square$

$$
\text{算符}\begin{cases}\text{不线性} \\ \text{线性}\begin{cases}\text{线性可逆} \\ \text{线性不可逆}\end{cases}\end{cases}
$$

4、对易子·

① $[\hat{A}, \hat{A}] = 0$

② $[\hat{B}, \hat{A}] = 0$

③ $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

④ $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] = [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$

$$
\begin{aligned}
[\hat{P}^2, \hat{X}^2] &= \hat{P}^2\hat{X}^2 - \hat{X}^2\hat{P}^2 \\
&= \hat{P}[\hat{P}, \hat{X}^2] + [\hat{P}, \hat{X}^2]\hat{P} \\
&= \hat{P}\hat{X}[\hat{P}, \hat{X}] + \hat{P}[\hat{P}, \hat{X}]\hat{X} + \hat{X}[\hat{P}, \hat{X}]\hat{P} + [\hat{P}, \hat{X}]\hat{X}\cdot\hat{P} \\
&= -2i\hbar(\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P})
\end{aligned}
$$

5、本征值与本征向量

$\exists\, |v\rangle \in V(\mathbb{F}),\ |v\rangle \neq 0,\ s.t.$

$$
\hat{A}|v\rangle = \underbrace{\lambda}_{\text{本征值}} \underbrace{|v\rangle}_{\text{本征向量}}
$$

$\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$

$\forall c \neq 0$

$\hat{A}(c|v\rangle) = \lambda(c|v\rangle)$

$\hookrightarrow c\hat{A}|v\rangle = c\cdot\lambda|v\rangle$

性质： 1. 可逆的线性算符必不为0的本征值。 ✓

2. $\hat{A}$ 是可逆 ---

若 $\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$

则 $\hat{A}^{-1}|v\rangle = \lambda^{-1}|v\rangle$

$$\underbrace{\hat{A}^{-1}\hat{A}|v\rangle}_{=|v\rangle} = A^{-1}\lambda|v\rangle$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}|v\rangle = \lambda^{-1}|v\rangle$$

3. $V^0(\mathbb{F})$ 中 $|v_1\rangle \cdots |v_n\rangle$ 线性独立。

$\{\hat{A}|v_1\rangle \cdots \hat{A}|v_n\rangle\}$ 是线性独立。

A 须是可逆

本征谱 Eigenvalue Spectrum

$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_D\}$

可以有重复的。

简并 (Degenerate)

简并度 (Degeneracy)

一个本征值 λ，对应若干个线性独立的本征向量 N

$N \leq D$.

6. 子空间。

$V' \subset V^0(\mathbb{F})$，在原来 $+, \cdot$，V' 也构成一个向量空间，

则称 V' 是子空间。

例：$V^3(\mathbb{R})$ 中，

x 轴

y 轴　　过原点一条直线，

x-y 平面

$z=1$ 平面 ✗

不变子空间

$\forall |u\rangle \in V'$，$\hat{A}|u\rangle \in V'$，称 V' 在 $\hat{A}$ 作用下不变子空间.

$\hat{A}$ 是线性，$\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$

① $\{\alpha|v\rangle \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$ 是子空间.

② 是 $\hat{A}$ 下的不变子空间.

直和 Direct Sum

V_1 和 V_2 是 $V^n(\mathbb{F})$ 之子空间

当且仅当，$\forall |v\rangle \in V^n(\mathbb{F})$，均有 $|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$

$|v_1\rangle \in V_1$，$|v_2\rangle \in V_2$，且分解唯一.

$$V^n(\mathbb{F}) = V_1 \oplus V_2 .$$

性质. 交换律、结合律.

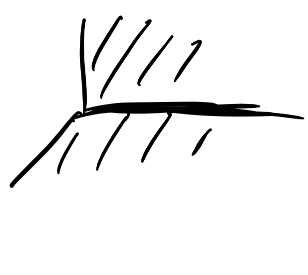
$$V_1 \oplus V_2 = V_2 \oplus V_1$$

$$(m_1 \oplus m_2) \oplus V_2 = m_1 \oplus (m_2 \oplus V_2)$$

例：$V^3(\mathbb{R}) = x \oplus y \oplus z$

$= z \oplus (x\text{-}y)$

$\overset{?}{=} (x\text{-}y) \oplus (y-z)$ ✗



$$V^D(\mathbb{F}) = V_1'(\mathbb{F}) \oplus \cdots \oplus V_D'(\mathbb{F})$$

$$V_i'(\mathbb{F}) = \{\alpha_i |v_i\rangle \mid \alpha_i \in \mathbb{F}\}$$

V_1, V_2. $\forall |v\rangle \in V$，均有 $|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$

则 $V = V_1 + V_2$

[直和定理]

V_1 和 V_2 是 $V^D(\mathbb{F})$ 之子空间，当且仅当

① $V = V_1 + V_2$

② $V_1 \cap V_2 = \{|0\rangle\}$

则有 $V = V_1 \oplus V_2$

证明：⇐ $V = V_1 \oplus V_2$，故 $V = V_1 + V_2$

设 $|w\rangle \in V_1 \cap V_2$，

$$\underset{V}{|w\rangle} = \underset{V_1}{|w\rangle} + \underset{V_2}{|0\rangle} = \underset{V_1}{|0\rangle} + \underset{V_2}{|w\rangle}$$

$\Rightarrow$ $|w\rangle = |0\rangle$

$\Rightarrow$ $\forall |v\rangle \in V$，$|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$

反设 $|v\rangle = |v_1'\rangle + |v_2'\rangle$

$$\Rightarrow \underset{V_1}{|v_1\rangle - |v_1'\rangle} = \underset{V_2}{|v_2\rangle - |v_2'\rangle} = 0$$

$\therefore$ $|v_1'\rangle = |v_1\rangle$，$|v_2'\rangle = |v_2\rangle$

$\Rightarrow$ $V = V_1 \oplus V_2$

定理：$V = V_1 \oplus V_2$

V_1 一组线性无关向量 $\Rightarrow$ 线性无关

V_2 一 ——

证明：$|v_1\rangle \cdots |v_N\rangle \in V_1$

$N \le \dim V_1$

$|w_1\rangle \cdots |w_M\rangle \in V_2$

$M \le \dim V_2$

$\alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_N|v_N\rangle + \beta_1|w_1\rangle + \cdots + \beta_M|w_M\rangle = 0$

非零解：一、$\{\alpha\} = 0$ ×

二、$\{\beta\} = 0$ ×

三、$\{\alpha\} \ne 0$，$\{\beta\} \ne 0$

$$\underbrace{\alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_N|v_N\rangle}_{V_1} = \underbrace{-(\beta_1|w_1\rangle + \cdots + \beta_M|w_M\rangle)}_{V_2} = 0$$

矛盾.

定理 $V = V_1 \oplus V_2$

$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$

证明：$D = \dim V$，$d_1 = \dim V_1$，$d_2 = \dim V_2$

if $d_1 + d_2 > D$

$d_1 \quad d_2 \longrightarrow d_1 + d_2$ 矛盾.

$d_1 + d_2 < D$ 矛盾 $\Rightarrow d_1 + d_2 = D$.

（除去本身和$\{|0\rangle\}$）

m 为 V 的一个真子空间，则有另一个真子空间 m', s.t. $V = m \oplus m'$

m' 为 m 的互补子空间

证明： $D = \dim V$， $m = \dim m$

∴ $1 \le m \le D-1$

$m \to m$ 个基底 $|v_1\rangle \cdots |v_m\rangle$

再在 V 中找 $|v_{m+1}\rangle \cdots |v_D\rangle$

$\forall |\psi\rangle \in V$,

$$\underset{V}{|\psi\rangle} = \underbrace{c_1|v_1\rangle + \cdots + c_m|v_m\rangle}_{m} + \underbrace{c_{m+1}|v_{m+1}\rangle + \cdots + c_D|v_D\rangle}_{m'}$$

∴ $V = m \oplus m'$，且 $\dim m' = \dim D - \dim m$.

$\forall |\psi\rangle \in V^D(\mathbb{F})$

$$|\psi\rangle = \alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_D|v_D\rangle$$

$$= \underline{\alpha_1|v_1\rangle} + \cdots + \alpha_n|v_n\rangle + \cdots + \alpha_D|v_D\rangle$$

$$\Rightarrow V^D(\mathbb{F}) = V_1^n(\mathbb{F}) \oplus V_2^{D-n}(\mathbb{F})$$

$$= m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_D$$