向量空间

1、定义. V 是由一组向量 $|a\rangle, |b\rangle, \cdots$, 组成的集合 $\Rightarrow V(\mathbb{F})$

与一组~~数~~数 $a, b, c, \cdots \in \mathbb{F}$ (域)

并且有运算法则.

一、加法

二、数乘

一、(i) 封闭性 若 $|v\rangle + |w\rangle \in V$　$|v\rangle + |w\rangle \in V$

(ii) 交换律 $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$, $\forall |v\rangle, |w\rangle \in V$

(iii) 结合律 $(|v\rangle + |w\rangle) + |a\rangle = |v\rangle + (|w\rangle + |a\rangle)$, $\forall |v\rangle, |w\rangle, |a\rangle$

(iv) 存在单位元, 记为 $|0\rangle$, $\therefore |0\rangle \in V$

s.t. $|0\rangle + |v\rangle = |v\rangle$, $\forall |v\rangle \in V$

(v) 存在~~逆~~反元, 记为 $|-v\rangle \in V$, s.t. $|-v\rangle + |v\rangle = |0\rangle$.

二、(i) 封闭性 $\alpha|v\rangle \in V$ 若 $|v\rangle \in V$

(ii) 数乘对向量加法分配率 $\alpha(|v\rangle + |w\rangle) = \alpha|v\rangle + \alpha|w\rangle$

(iii) 数乘对~~数~~数加法有分配率 $(\alpha+\beta)|v\rangle = \alpha|v\rangle + \beta|v\rangle$

(iv) 结合律 ~~$|v\rangle$~~ $\alpha(\beta|v\rangle) = (\alpha \cdot \beta)|v\rangle$

(v) $|v\rangle = 1 \cdot |v\rangle$, $\forall |v\rangle \in V$

2、例子.

① $\mathbb{R}(\mathbb{R})$　$+: (x, y) \mapsto x+y$

$\cdot: (x, y) \mapsto xy$

② $\mathbb{C}(\mathbb{C})$

③ $\mathbb{C}(\mathbb{R})$、$\mathbb{R}(\mathbb{C})$

④ ~~$\mathbb{C}^{3\times1}(\mathbb{R})$~~　$\mathbb{C}^{n\times m}(\mathbb{C})$

⑤ $f(x)$, $x \in [a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$

⑥ $f(x)$, $x \in [a, b]$, $f(a) = f(b) = 1$

性质: 1. 加法单位元唯一

2. 加法相反元唯一

3. $0 \cdot |\psi\rangle = |0\rangle$

4. $\alpha|0\rangle = |0\rangle$

5. $|f\rangle + |v\rangle = |f\rangle$
$\Rightarrow |v\rangle = |0\rangle$

6. $|-v\rangle = (-1) \cdot |v\rangle$

向量的线性组合.

[~~定~~] 定义

$|v\rangle = \alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_k|v_k\rangle$

则 $|v\rangle$ 是 $|v_1\rangle \cdots |v_k\rangle$ 的线性组合.

线性独立.

$\alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_n|v_n\rangle = |0\rangle$ 之唯一解为

解系数

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, 则 $|v_1\rangle \cdots |v_n\rangle$ 线性独立.

n 可以是无穷大.

性质: 有一个 $|0\rangle$ 则一定相关.

维数与基底 $\longrightarrow$ $V^n(\mathbb{F})$ 之一组 n 个线性独立的向量, 称为 $V^n(\mathbb{F})$ 之一基底

最多只能找到 n 个线性独立的向量

$\dim V = n$

$V^n(\mathbb{F})$, 可以是无穷大

$\dim \mathbb{R}(\mathbb{R}) = 1$

[Theorem]

$|v_1\rangle, \cdots |v_n\rangle$ 是 $V^n(\mathbb{F})$ 之一组基底

则任一向量 $|\psi\rangle \in V^n(\mathbb{F})$

① 可写成 $|v_1\rangle, \cdots |v_n\rangle$ 之线性组合.

② 组合系数唯一.

Proof: ① $\because \dim V = n$

$|\psi\rangle, |v_1\rangle, \cdots |v_n\rangle$ 线性相关

$\alpha|\psi\rangle + \alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_n|v_n\rangle = 0$ 有非零解.

一: $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1, \cdots \alpha_n$ 中至少有一个不为 0, 不可能.

$\alpha \neq 0 \Rightarrow$ 有 $|\psi\rangle = -\frac{\alpha_1}{\alpha}|v_1\rangle - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha}|v_n\rangle$　① ✓

② 反设有 $c_1', \cdots c_n'$.

$(c_1-c_1')|v_1\rangle+\cdots+(c_n-c_n')|v_n\rangle=|0\rangle$

$\Rightarrow c_i=c_i'$ ✓

基底的用处：可以描述向量空间中任一向量 ← 完备性.
（可以生成原向量空间）.

可以表示任一向量. ← 恰完备性.

- 不完备
- 完备
  - 过完备
  - 恰完备（唯一线性组合）

完备：$\forall |v\rangle \in V(\mathbb{F})$ 都可写成某一组向量之线性组合）
Complete

例子. $V^3(\mathbb{R})$

一、$\{e_x\}$, $\{e_x-e_y\}$

二、$\{e_x, e_y\}$, $\{e_x+e_y, e_x-e_y\}$

三、$\{e_x, 2e_x, 3e_x\}$ ×

四、必定线性相关.

$\{e_x, e_y, e_z, e_x-e_z\}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{cases} (a, b, c, 0) \\ (a-1, b, (c+1), 1) \\ (\cdots\cdots, 2 \end{cases}$$

量足够

↓

线性独立.

$\{e_x, e_y, e_z\}$

$\{e_x+e_y, e_y+e_z, e_z\}$

↓

矩阵的秩.

所以"基底恰完备"，
等于维数，且线性独立
⇒ 线性组合系数唯一.
rank = 3 满秩.

在选定基底下.

任一向量 $\xleftrightarrow{1-1}$ 线性组合系数 $\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

（表示）

$V^N(\mathbb{F})$ 中一组（恰、过）完备的向量组 $\{|v_1\rangle, \cdots, |v_m\rangle\}$ 必可以生成原向量空间 $V^N(\mathbb{F})$，必有

$$V^N(\mathbb{F})=\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i|v_i\rangle \,\middle|\, a_i\in\mathbb{F}\right\}$$

例：$\{|v_1\rangle, \cdots, |v_m\rangle\}$ 为 $V^N(\mathbb{F})$ 中一向量组，则

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i|v_i\rangle \,\middle|\, a_i\in\mathbb{F}\right\}$$ 是向量空间.

向量组无有维度，即为以上的维数.

算符. 作用在某一向量空间之任意给定向量上，
将其映射到同一向量空间中（另）一向量的操作（运算）.
封闭性.

$\hat{A}: |v\rangle \longrightarrow |w\rangle$.

$|w\rangle = \hat{A}|v\rangle$

运算均有唯一性.
$|v\rangle+|w\rangle$
$\alpha|v\rangle$
$\hat{A}|v\rangle$

"$\hat{A}$ 是~~作用在~~ $V^n(\mathbb{F})$ 中的算符.

算符的相等与运算

定义. $\hat{A}$, $\hat{B}$ 是 $V^n(\mathbb{F})$ 中的算符

$\forall |v\rangle \in V^n(\mathbb{F})$，$\hat{A}|v\rangle=\hat{B}|v\rangle$，则 $\hat{A}=\hat{B}$.

具有反身性、相互性、传递性，是等价关系。

定义. $\hat{A}+\hat{B}$ 仍为 $V^p(\mathbb{F})$ 中 Operator,

$(\hat{A}+\hat{B})|v\rangle = \hat{A}|v\rangle + \hat{B}|v\rangle$, $\forall |v\rangle \in V^p(\mathbb{F})$

交换律. 结合律.

$\hat{A}+\hat{B} = \hat{B}+\hat{A}$　　$(\hat{A}+\hat{B})+\hat{C} = \hat{A}+(\hat{B}+\hat{C})$

定义 $\hat{A}\cdot\hat{B}$ 是 $V^p(\mathbb{F})$ 中的 operator

$(\hat{A}\cdot\hat{B})|v\rangle = \hat{A}(\hat{B}|v\rangle)$　$\forall v \in V^p(\mathbb{F})$

~~$\hat{A}_1$ - -~~

$\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n$ 为 $V^p(\mathbb{F})$ 中一算符.

$(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n)|v\rangle = \hat{A}_1(\cdots(\hat{A}_n|v\rangle))$　$\forall |v\rangle \in V^p(\mathbb{F})$

结合律

$(\hat{A}\cdot\hat{B})\cdot\hat{C} = \hat{A}\cdot(\hat{B}\cdot\hat{C})$

定义 算符的数乘, $\hat{A}$ 为 $V^p(\mathbb{F})$ 中的, $\alpha \in \mathbb{F}$.

$\alpha\hat{A}$ 为 $V^p(\mathbb{F})$ 中的 ——

$(\alpha\hat{A})|v\rangle = \alpha(\hat{A}|v\rangle)$, $\forall |v\rangle \in V^p(\mathbb{F})$

定义 单位算符

$V^p(\mathbb{F})$ 中的算符有 $\hat{A}|v\rangle = |v\rangle$　$\forall |v\rangle \in V^p(\mathbb{F})$,

则 $\hat{A}$ 为一单位 ——, 记为 $\hat{\mathbb{1}}$.

$\therefore \hat{\mathbb{1}}|v\rangle = |v\rangle$　　$\forall v \in V^p(\mathbb{F})$

可以证明: 1. $\hat{A}\cdot\hat{\mathbb{1}} = \hat{\mathbb{1}}\cdot\hat{A}$, 2. $\hat{\mathbb{1}}+\hat{\mathbb{1}}+\cdots\hat{\mathbb{1}} = n\hat{\mathbb{1}}$

定义 零算符 $\forall\hat{A}$ 在 $V^p(\mathbb{F})$ 中

有 $\hat{A}|v\rangle = |0\rangle$　$\forall |v\rangle \in V^p(\mathbb{F})$

则 $\hat{A}$ 为一零算符, 记为 $\hat{O}$

$\therefore \hat{O}|v\rangle = |v\rangle$

可以证明 $\hat{A}+\hat{O} = \hat{O}+\hat{A}$

$\hat{O}\cdot\hat{A} = \hat{O}$

$\alpha\cdot\hat{O} = \hat{O}$

$0\cdot\hat{A} = \hat{O}$

定义 $\hat{A}-\hat{B} = \hat{A}+(-1)\hat{B}$

可以证明:

$\hat{A}\cdot(\hat{B}+\hat{C}) = \hat{A}\cdot\hat{B}+\hat{A}\cdot\hat{C}$ (　　)

$(\hat{B}+\hat{C})\cdot\hat{A} = \hat{B}\cdot\hat{A}+\hat{C}\cdot\hat{A}$

Proof: $\hat{A}\cdot(\hat{B}+\hat{C})|v\rangle$

$= \hat{A}[(\hat{B}+\hat{C})|v\rangle]$

$= \hat{A}(\hat{B}|v\rangle + \hat{C}|v\rangle)$

$= \hat{A}(|v_1\rangle + |v_2\rangle)$

线性算符 $\hat{A}|v_1\rangle + \hat{A}|v_2\rangle$

$= \hat{A}(\hat{B}|v\rangle) + \hat{A}(\hat{C}|v\rangle)$

$= (\hat{A}\cdot\hat{B})|v\rangle + (\hat{A}\cdot\hat{C})|v\rangle$

$= (\hat{A}\cdot\hat{B}+\hat{A}\cdot\hat{C})|v\rangle$

$(\hat{B}+\hat{C})\cdot\hat{A}|v\rangle$

$= \hat{B}(\hat{A}|v\rangle) + \hat{C}(\hat{A}|v\rangle)$

$= (\hat{B}\cdot\hat{A})|v\rangle + (\hat{C}\cdot\hat{A})|v\rangle$.

$= (\hat{B}\cdot\hat{A}+\hat{C}\cdot\hat{A})|v\rangle$

算符作为映射的分类

~~一对一~~, ~~多对一~~

~~映成~~, ~~非映成~~

$\hat{A}|v_1\rangle \neq \hat{A}|v_2\rangle$, $\forall |v_1\rangle \neq |v_2\rangle$

单射.

$\forall |w\rangle \in V^p(\mathbb{F})$, $\exists |v\rangle \in V^p(\mathbb{F})$ s.t. $\hat{A}|v\rangle = |w\rangle$　满射.

逆算符.

$\hat{A}$. $\exists \hat{B}$ 在 $V(\mathbb{F})$ 中,

$\hat{A}\cdot\hat{B} = \hat{B}\cdot\hat{A} = \hat{I}$ ，则 $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$

(可逆算符)

性质：若一算符可逆，则该算符为满射，反之亦然.

$\Leftarrow$ $\forall |w\rangle \in V(\mathbb{F})$，$\exists |v\rangle \in V(\mathbb{F})$

s.t. $\hat{A}|v\rangle = |w\rangle$，$\underline{A}\ |w\rangle$ 唯一.

$\therefore$ $|w\rangle \to |v\rangle$，映后，即为 A^{-1}.

$\Rightarrow$ 若不是满射， $\longrightarrow$ A 不可逆

若多对一，无法定义

，射不满

~~推论~~：$(\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A}$

线性算符.

$V(\mathbb{F})$ 中算符有：$\hat{A}(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle) = \alpha\hat{A}|v\rangle + \beta\hat{A}|w\rangle$.

$\forall |v\rangle, |w\rangle \in V(\mathbb{F})$，$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$，则 $\hat{A}$ ——

~~一 给定 $\hat{A}$，验证 $\hat{A}$ 是否线性~~.

$\cancel{\hat{A}(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle) \overset{?}{=} \alpha\hat{A}|v\rangle + \beta\hat{A}|w\rangle}$.

基本性质.

① . 两个线性 O_p . 和 乘积仍为线性 O_p

$\hat{A}\cdot\hat{B}\,(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle)$

$= \hat{A}(\hat{B}(\alpha|v\rangle) + \hat{B}(\beta|w\rangle))$

$= \alpha\,\hat{A}(\hat{B}|v\rangle) + \beta\,\hat{A}(\hat{B}|w\rangle) = \ldots$

② $L_i O_p$ 线性仍为

③ 可逆 $\hat{A}$ 是 L，则 $\hat{A}^{-1}$ 也为 L_i （反之亦然）

$\hat{A}^{-1}(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle)$

$= A^{-1}(\alpha\hat{A}|f\rangle + \beta\hat{A}|g\rangle) = \hat{A}^{-1}(\hat{A}(\alpha|f\rangle + \beta|g\rangle)) = \hat{I}(\quad) = \alpha A^{-1}|v\rangle + \beta A^{-1}|w\rangle$

设 $\hat{A}|f\rangle = |v\rangle$ $\Rightarrow$ $|f\rangle = A^{-1}|v\rangle$

$\hat{A}|g\rangle = |w\rangle$ $\qquad |g\rangle = A^{-1}|w\rangle$

④ 若 $\hat{A}$ 是 L_i，则 $\hat{A}|0\rangle = |0\rangle$

若 $\hat{A}|0\rangle \neq 0$，则 $\hat{A}$ 不是 L_i

Proof $\quad A(|v\rangle + |-v\rangle) = A|v\rangle - A|v\rangle = 0$.

⑤ $\hat{A}$ 是 L_i，$\hat{A}$ 作用在任意一组基底中的向量已知，

则 $\hat{A}$ 作用在任一向量上已知

另外：$\hat{0}$ 和 $\hat{I}$ 也是 LO.

定理. 当且仅当 $\hat{A}|v\rangle = |0\rangle$ 之唯一解为 $|v\rangle = |0\rangle$

则 $\hat{A}$ 可逆.

$\Leftarrow$. $\hat{A}^{-1}(\hat{A}|v\rangle) = \hat{A}^{-1}(|0\rangle) \underset{}{=} |0\rangle$ （A^{-1} 存在）

$= \hat{I}|v\rangle$

$= |v\rangle$

$\Rightarrow$ 考虑 $V(\mathbb{F})$ 中一组基底 $\{|u_i\rangle\}$

$\sum_i a_i \hat{A}|u_i\rangle = |0\rangle$

$\| $

~~$\sum_{i=1}^{p} a_i A$~~ $\hat{A}(\sum_{i=1}^{p} a_i|u_i\rangle)$

$\therefore \sum_{i=1}^{p} a_i|u_i\rangle = |0\rangle$

$\Downarrow$

$a_i = 0$

$\Downarrow$

~~$\hat{A}|v\rangle = 0$~~

$\therefore \sum_i a_i \hat{A}|u_i\rangle = 0$

$\Downarrow$

$\hat{A}|u_1\rangle, \ldots \hat{A}|u_p\rangle$ 为 $V(\mathbb{F})$ 中一组基底

$|\psi\rangle = a_1\hat{A}|u_1\rangle + \cdots$

$= \hat{A}($ $)$ $\Rightarrow$ $\therefore$ 满

性质，交换律，结合律.

$V_1 \oplus V_2 = V_2 \oplus V_1$

$(m_1 \oplus m_2) \oplus V_2 = m_1 \oplus (m_2 \oplus V_2)$

例

$V^3(\mathbb{R}) = z \oplus x\text{-}y \quad \neq x\text{-}y \oplus y\text{-}z$?

$= x \oplus x\text{-}y$

$= x \oplus y \oplus z.$

~~直和定理~~ 以可以将 $V^D(\mathbb{F})$ 分解到 D个一维子空间的直和

$\{|v_1\rangle, \dots |v_D\rangle\}$ 基底，$V^D(\mathbb{F}) = V_1'(\mathbb{F}) \oplus \cdots \oplus V_D'(\mathbb{F})$

$V_i'(\mathbb{F}) = \{\alpha_i |v_i\rangle \mid \alpha_i \in \mathbb{F}\}.$

本质上与向量的分解一样（因为向量空间就是一维向量）

算迹相加，V_1, V_2 为 2 LS.

当且仅当，$\forall |v\rangle \in V$，均有 $|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$

则 $V = V_1 + V_2$

[直和定理] $V(\mathbb{F})$

V_1 和 V_2 为二子空间，当且仅当

① $V = V_1 + V_2$

② $V_1 \cap V_2 = \{|0\rangle\}$

则有 $V_1 \oplus V_2 = V$

Proof: $\Leftarrow$ $V = V_1 \oplus V_2$，$\forall |v\rangle \in V$，必有 $|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$ 且唯一，而故 $V = V_1 + V_2$.

令 $|w\rangle \in V_1 \cap V_2$，$\underset{V}{|w\rangle} = \underset{V_1}{|w\rangle} + \underset{V_2}{|0\rangle} = \underset{V_1}{|0\rangle} + \underset{V_2}{|w\rangle}$

由拆解方式唯一，$|w\rangle = |0\rangle$

反设 $\hat{A}|u\rangle = \hat{A}|v\rangle$

$\Rightarrow \hat{A}(|u\rangle + (-1)|v\rangle)$

$\Rightarrow \hat{A}(|u\rangle - a|v\rangle) = |0\rangle$

$\Rightarrow |u\rangle = |v\rangle$

单射，$\therefore$ 可逆.

线性算符

$\hat{A}|0\rangle \to |0\rangle$

1. 只将 $|0\rangle \to |0\rangle$，可逆

2. 还将 $|\psi\rangle \neq |0\rangle \to |0\rangle$，不可逆

$$\text{算符}\begin{cases} \text{Li} \begin{cases} \text{re Li} \\ \text{irre Li} \end{cases} \\ \text{NonLi} \end{cases}$$

对易子. 略

（需用线性）

① $[\hat{A}, \hat{A}] = \hat{0}$

② $[\hat{B}, \hat{A}] = -[\hat{A}, \hat{B}]$

③ $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \cancel{[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{C}]]}$ $\hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

④ Jacobi

$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

$[\hat{p}^2, \hat{x}^2] = \hat{p}^2\hat{x}^2 - \hat{x}^2\hat{p}^2$

$= \hat{p}[\hat{p}, \hat{x}^2] + [\hat{p}, \hat{x}^2]\hat{p} = \hat{p}[\hat{p}, \hat{x}]\hat{x} + \hat{p}\hat{x}[\hat{p}, \hat{x}] + \dots$

本征值与本征向量.

定义： $\hat{A}$ 为 $V(\mathbb{F})$ 中之一 LO，当且仅当，$\exists\ |v\rangle \in V(\mathbb{F})$，$|v\rangle \neq |0\rangle$
s.t. $\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$ 时，则称 ~~λ~~ λ 为 $\hat{A}$ 之一本征值，
$|v\rangle$ 为 $\hat{A}$ 对应于该 λ 的本~~征~~征向量 $|\lambda\rangle$, $|v_\lambda\rangle$

为什么不考虑 $|0\rangle$

若已知 $\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$ (A is L)

$\forall c \in \mathbb{C}$

$$\hat{A}(c|v\rangle) = \lambda(c|v\rangle)$$
$$= c\hat{A}|v\rangle = c\lambda|v\rangle$$

对应于一个本征值的本征向量有无穷多，无穷多个本征向量是线性相关的。"同一方向"，本征方向。

对于非线性 O，
当 $\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$ 时，没有 $\hat{A}(c|v\rangle) = \lambda(c|v\rangle)$. $c \neq 1$（通常）

练习. 1. 可逆的 ~~线~~ LO 的本征值必不为 0. ✓ 唯一性.

2. $\hat{A}$ 是 RLO，
若有 $\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$
则有 $\hat{A}^{-1}|v\rangle = \lambda^{-1}|v\rangle$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{A}^{-1}\cdot\hat{A}|v\rangle &= \hat{A}^{-1}\lambda|v\rangle \\ |v\rangle &= \hat{A}^{-1}\lambda|v\rangle \\ \hat{A}^{-1} &= \lambda^{-1}|v\rangle \end{aligned}}$$

但几重根算几个

3. $V^P(\mathbb{F})$ 中 $|v_1\rangle \cdots |v_n\rangle$ 线性独立，
$\{\hat{A}|v_1\rangle \cdots, \hat{A}|v_n\rangle\}$ 线性独立.

$\hat{A}$ 须有什么性质，
↓
可逆

本征值谱 Eigenvalue Spectrum. $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_D\}$（空间D相同）

简并 .(Degenerate)

简并度 (Degeneracy)

定义：当且仅当 LO $\hat{A}$ 之 EV λ 对应~~的~~有 N 个若干线性独立的 EV，则称 λ 有简并. 简并度为 $N \leq D$

子空间.

定义：当且仅当 $V^P(\mathbb{F})$ 的子集 V'，在原来的 $+$, $\cdot$，下也构成 $V'(\mathbb{F})$ 的向量空间，则称为子空间.

例 $V^3(\mathbb{R})$ 中 过原点一条直线

x 轴

y 轴

z 轴.

x-y 平面 —

z=1 平面.

不变子空间.

$\hat{A}$ 是 $V^D(\mathbb{F})$ 中 LO，V' 是 $V^D(\mathbb{F})$ 的 subspace，
~~若~~ 当且仅当 $\forall\ |u\rangle \in V'$，~~皆~~ 总有 $\hat{A}|u\rangle \in V'$，
则称 V' 为 $\hat{A}$ 作用下的不变子空间.

$\hat{A}$ 是 $V^D(\mathbb{F})$ 中 LO，且有 $\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$.

① $\{\alpha|v\rangle \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$ 为一子空间

② 是 $\hat{A}$ 下的不变子空间.

直和 Direct Sum.

V_1, V_2 是 $V^D(\mathbb{F})$ 中的 subspace

当且仅当，$\forall\ |v\rangle \in V^D(\mathbb{F})$，均有 $|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$
$|v_1\rangle \in V_1$ $|v_2\rangle \in V_2$
且 $|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$ 分解唯一，则 $V^D(\mathbb{F})$ 是 V_1 和 V_2 的直和
$V^D(\mathbb{F}) = V_1 \oplus V_2$

$\Rightarrow \quad V_1 = V_1 + V_2$

且 $V_1 \cap V_2 = \{|0\rangle\}$

$\forall |v\rangle \in V$，必有 $|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$

反设 有 $|v\rangle = |v_1'\rangle + |v_2'\rangle$

则 $|v_1\rangle + |v_2\rangle = |v_1'\rangle + |v_2'\rangle$

$\Rightarrow \big((|v_1\rangle + |v_2\rangle) + |-v_1'\rangle\big) + |-v_2\rangle = \big((|v_1'\rangle + |v_2'\rangle) + |-v_1'\rangle\big) + |-v_2\rangle$

$\Rightarrow \underset{V_1}{|v_1\rangle - |v_1'\rangle} = \underset{V_2}{|v_2'\rangle - |v_2\rangle}$

有 $V_1 \cap V_2 = \{|0\rangle\}$

$\therefore |v_1\rangle = |v_1'\rangle$.

$\therefore V = V_1 \oplus V_2$.

Theorem

已知 $V = V_1 \oplus V_2$

V_1 中的一组 LI 的向量

V_2 中的 ______

组成的向量组 LI

Proof:

$|v_1\rangle, \cdots |v_N\rangle \in V_1$, LI

$\therefore N \le \dim V_1$

$|w_1\rangle \cdots |w_M\rangle \in V_2$

$M \le \dim V_2$

设 $\{|v_1\rangle, \cdots, |v_N\rangle, |w_1\rangle, \cdots |w_M\rangle\}$ 为线性相关

$\alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_N|v_N\rangle + \beta_1|w_1\rangle + \cdots + \beta_M|w_M\rangle = 0$

非零解:

一. $\{\alpha\} \ne 0$; $\{\beta\} = 0$

二. $\{\alpha\} = 0$, $\{\beta\} \ne 0$ X

三. $\{\alpha\} \ne 0$, $\{\beta\} \ne 0$.

$\Rightarrow \underset{V_1}{\alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_N|v_N\rangle} = \underset{V_2}{-(\beta_1|w_1\rangle + \cdots + \beta_M|w_M\rangle)}$

$\therefore$ 有 ______ $= \cdots = |0\rangle$ ，矛盾.

定理： $V = V_1 \oplus V_2$

则有 $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$

Proof: 令 $D = \dim V$, $d_1 =$ $d_2 =$

$d_1 + d_2 > D$ 不可能

$d_1 \cdots$ d_2 —— 线性无关向量 矛

$d_1 + d_2 < D$ 不可能

在 V 中 可以找到 D 个 ~~……~~ $|v_1\rangle, \cdots, |v_{d_1+d_2}\rangle, \cdots$ $d_1 + d_2$ 个基底

~~线性无关向量~~ $\in V_1 \longrightarrow d_1$ 个基底

$\in V_2 \longrightarrow d_2$ 个基底

$\in V_1 \cap V_2$ X

(除除本身和$\{|0\rangle\}$)

M 为 V 的一个真子空间，则有另一真子空间 M',

s.t. $V = M \oplus M'$ (M' 为 M 之互补子空间，反之亦然)

Proof: M 为 V 之一真子空间.

$\therefore$ 令 $\begin{cases} D = \dim V \\ m = \dim M \end{cases}$.

$\therefore 1 \le m \le D-1$

试 $m = 1, \cdots, D-1$

V 中找出一组基底，先在 $M (\subset V)$ 中找出 m 个 $\cdots$

$|v_1\rangle, \cdots, |v_m\rangle$，再在 V 中找 $|v_{m+1}\rangle, \cdots |v_D\rangle$,

向里来构造 V 的基底，$\forall |\psi\rangle \in V$

必有 $|\psi\rangle = c_1|v_1\rangle + \cdots + c_m|v_m\rangle + c_{m+1}|v_{m+1}\rangle + \cdots + c_D|v_D\rangle$

$\therefore \forall |\psi\rangle \in V$，有

$V \ni |\psi\rangle = \underbrace{c_1|v_1\rangle + \cdots + c_m|v_m\rangle}_{\in M} + \underbrace{\cdots}_{\in M'}$

又因为 系数分解唯一

$\therefore \quad V = m \oplus m'$ 且 $\dim m' = \dim D - \dim m$

$\forall\, |\psi\rangle \in V^D(\mathbb{F})$

$|\psi\rangle = \alpha_1 |v_1\rangle + \cdots + \alpha_D |v_D\rangle$

$= \alpha_1 |v_1\rangle + \cdots + \alpha_n |v_n\rangle + \cdots$

$V^D(\mathbb{F}) = V_1^n(\mathbb{F}) + V_2^{D-n}(\mathbb{F})$

$= (m \oplus m') \oplus V_2 = m \oplus m' \oplus V_2 \cdots$

最多拆到1

即每个基底