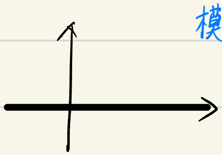
Chapter 11. 复变函数

1.1 复数与复变函数

$z = x + iy$ 共轭复数 $\bar{z} = x - iy$

$$\begin{cases} \text{直角} & z = x + iy \\ \text{极坐标:} & z = re^{i\theta} \end{cases} \longrightarrow \text{欧拉公式}$$

模长 辐角



复平面 Argrand diagram.

$z = re^{i\theta}$ $\qquad z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

Warning: 幅角不能唯一确定.

1.2 柯西-黎曼条件

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{(x+\delta x) - x} \qquad (x \to z)$$

$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{(z+\delta z) - z}$$

与接近方式无关

实: $\delta y = 0 \quad \delta x \to 0$

虚: $\delta x = 0 \quad \delta y \to 0$

$\delta z = \delta x + i\delta y$

$f = u + iv \qquad \delta f = \delta u + i\delta y.$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y}$$

1. $\lim\limits_{\delta x\to 0}\frac{\delta f}{\delta x} = \lim\limits_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta u}{\delta x}+i\frac{\delta v}{\delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

$\parallel$

2. $\lim\limits_{\delta y\to 0}\frac{\delta f}{\delta y} = \lim\limits_{\delta y\to 0}\left(-i\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta v}{\delta y}\right) = -i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$ 柯西-黎曼条件

解析函数

1. 如果 $f(z)$ 在复平面的一个区域内可微且单值的，则称其为该区域的解析函数.

2. 对于一个 $f(z)$，其在复平面上都是解析的，我们可称其为全纯函数.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad\rightarrow\quad \nabla^2 u=0\\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \quad\rightarrow\quad \nabla^2 v=0\end{cases}$$

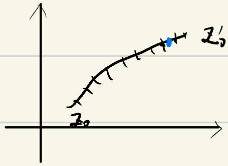
如果 $f(z)$ 解析，u,v → 复变函数的共轭调和函数.

$[fg]' = f'g+g'f$

$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$.

1.3. 柯西积分定理.

围道积分



$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1}) = \sum f(\xi_k)\Delta z_k$.

当 $n\to\infty$ 时，满足所有 $|z_k-z_{k-1}|\to 0$

则有：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi)(z_k - z_{k-1}) = \int_{z_0}^{z_0'} f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz$

$z = x+iy$，$f = u+iv$ 展开来看

$$\int_C f(z)\,dz = \int_l [u(x,y)+iv(x,y)][dx+idy]$$
$$= \int_l udx - vdy + i\int vdx + udy$$

一些性质

1、常数因子可以移到积分外

2. 函数的和的积分等于各个积分的和

3. 对于一个完整的路径的积分 = 各个路径部分的积分的和

4. $\left|\int_l f(z)\,dz\right| \le \int_l |f(z)||dz|$

5. $\left|\int_l f(z)\,dz\right| \le ML$　　M 是 $|f(z)|$ 在 l 上的最大值

L 是 l 的全长

柯西定理

(1) 单连通

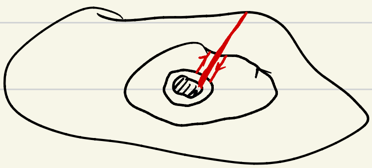
闭合曲线的积分

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Proof：$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy$

$$= -\iint\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

(2)



$$\oint_l f(z)\,dz = -\sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} f(z)\,dz$$

积分: $\oint (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n \neq -1 \end{cases}$

柯西积分公式:

$$\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

Proof: $z = z_0 + re^{i\theta}$ $\quad dz = ire^{i\theta} d\theta$ $\quad z_0 \quad r \to 0$

$$\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta$$

$$= 2\pi i f(z_0)$$

z_0 在曲之外那显然为0.

完整的柯西公式

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0}dz \begin{cases} f(z_0) & 点在园内 \\ 0 & 点在圆外 \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz.$$

反复求导:

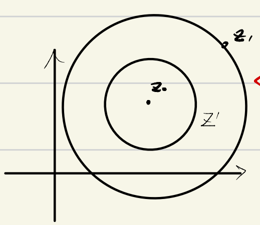
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

莫雷拉定理:

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续，并且沿着 D 内任何一条可求长闭合曲线 C 的积分恒等于零，那么 $f(z)$ 在区域 D 内是解析的

1.5 级数展开

泰勒展开:



$|z_1 - z_0|$ 内都是解析的

收敛圆

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{z'-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)\left[1-\underbrace{\frac{z-z_0}{z'-z_0}}_{t}\right]}$$

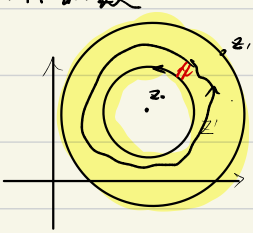
$$1+t+t^2+\cdots=\sum t^n=\frac{1}{1-t} \quad t<1$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

洛朗级数

奇点



在一个环域上的展开

$$R_2<|z-z_0|<R_1$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\oint_{C_2}(z'-z_0)^{n+1}f(z')dz'$$

柯西定理

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$ 其中 $$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi$$

环域内沿正向绕一周的闭合曲线

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 解析部分 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n}$ 主要部分

洛朗级数和泰勒级数 都是唯一的.

奇点 → 孤立奇点：
→ 非孤立奇点：

奇点的三种类型

1、可去奇点　　没有负幂项.

2、极点　　只有有限个负幂项

3、本性奇点　　无限个负幂项.

对于 可去奇点

$$g(z)=\begin{cases} f(z) & (z\neq z_0) \\ a_0. & (z=z_0) \end{cases}$$

$f(z)$ 的洛朗
↓
$g(z)$ 的泰勒展开

$a_0=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$

对于极点：$f(z)=\sum\limits_{k=-m}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$

有 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$

m 为极点的阶，一阶极点称为单极点.

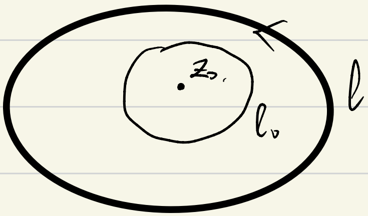
本性奇点：

$z\to z_0$　$f(z)$ 的极限值随趋于 z_0 的方式而定

$$\lim_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}=\begin{cases} +\infty & 正实 \\ -\infty & 负实 \\ 0 & 虚轴 \end{cases}$$

若在无限远处，$z\to\frac{1}{t}$ 处理

1.6 留数定理



我们有洛朗级数

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$\oint_l f(z)dz=\oint_{l_0}f(z)dz$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}a_k\oint_{l_0}(z-z_0)^k dz$$

$k=-1$ 积分 $2\pi i$

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i\, a_{-1}$$

a_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 的 留数，通常记为 $\mathrm{Res}\, f(z_0)$

$$\boxed{\oint_l f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\, f(b_i)}$$

计算留数：1、洛朗展开

2. 单极点 $f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+\cdots$

$$(z-z_0)f(z)=a_{-1}+a_0(z-z_0)+\cdots$$

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]=\text{非零}\to\mathrm{Res}\, f(z_0)$$

如果 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 　$P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 处解析　z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点．　$P(z_0)\neq 0$

$$\mathrm{Res}\, f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Example: $f(z)=\frac{1}{z^n-1}$ 在 $z=1$ 的留数

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+\cdots+z+1)}$$

$$\lim_{z\to 1}[(z-1)f(z)]=\frac{1}{n}$$

对于m阶极点： $\text{Res} f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}$

Example：求沿单位圆 $|z|=1$ 的回路积分：

$$\oint_C \frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$$

知极点

$$\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=0 \qquad z=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$$

计算留数：

$$\text{Res} f\left(\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$\oint \frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon} = \frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

在实变函数的应用

类型一： $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx$

$$z=e^{ix} \qquad dx=\frac{1}{iz}dz$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$$

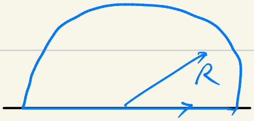
$$\sin x = \frac{1}{2i}(z-z^{-1})$$

$$I=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

类型二： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

通常：

$I=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ 当极限存在时是积分的主值



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \text{Res}_{\text{上半平面}}$$

类型三. $\int_0^{+\infty} F(x)\cos mx\,dx$ 偶　　在上半平面 除有限个奇点外是解析

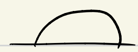
$\int_0^{+\infty} G(x)\sin mx\,dx$ 奇

$z\to\infty$　$F,G\to 0$

$\cos mx = \frac{1}{2}(e^{imx}+e^{-imx})$

$\sin mx = \frac{1}{2i}(e^{imx}-e^{-imx})$

$$\left.\begin{aligned}\int \_\_\_\, dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{imx}dx \\ &= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)e^{imx}dx\end{aligned}\right\}$$ 约当定理



若m为正数，C_R 是以原点为圆心而位于上半平面的半圆周

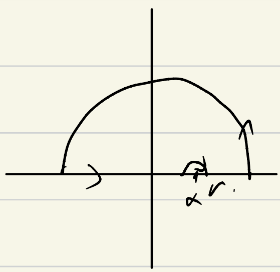
当上半平面及实轴 $\to\infty$ 时，$F(x)$ 一致地 $\to 0$ 则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)e^{imz}dz=0.$$

$$\int_0^{+\infty}F(x)\cos mx\,dx = \pi i\,(\text{上半平面的留数})$$

实轴上有单极点的情况

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$　有极点 $z=\alpha$.



取 $R\to\infty$，r为

$$\oint_l f(z)dz = \int_{-R}^{\alpha-r}f(x)dx+\int_{\alpha+r}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}\_\_\,dz+\underline{\underline{\int_{C_r}\_\_\,dz}}$$

洛朗展开

$$f(z) = \frac{\alpha_{-1}}{z-\alpha} + P(z-\alpha) \to \text{解析部分}.$$

$\to 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) + \pi i \operatorname{Res} f(\alpha).$$