Bessel Functions

1、第一类贝塞尔函数

贝塞尔方程：

$$x^2 J_v'' + x J_v' + (x^2 - v^2) J_v = 0 \quad (v \geq 0)$$

求解：$x=0$ 是方程的正则奇点

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$ △代入↓

$$\text{式子左} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+2} - v^2$$

$$= x^r \left\{ C_0 (r^2 - v^2) + C_1 [(r+1)^2 - v^2] x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(k+r+2)(k+r+1) C_{k+2} + (k+r+2) C_{k+2} + C_k - v^2 C_{k+2} \right] x^k \right\}$$

第一个：$r^2 - v^2 = 0 \Rightarrow r = v, \ r = -v$.

取 $r=v$ 时

$$\begin{cases} (2v+1) C_1 = 0 & ① \\ (k+2)(k+2+2v) C_{k+2} + C_k = 0 & ② \end{cases}$$

$$C_1 = 0$$

$$C_{k+2} = \frac{-C_k}{(k+2)(k+2v+2)} \qquad C_{2n+1} = 0$$

令 $k+2=2n$. 有：

$$C_{2n} = \frac{-C_{2n+2}}{2^2 n (n+v)}$$

$$C_2 = \frac{-C_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (1+v)}$$

$$\vdots$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (1+v) \cdots (n+v)} C_0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n v!}{2^{2n} n! (n+v)!} x^{2n+v}$$

$$k_2 = \frac{1}{2^v \Gamma(1+v)}$$

$$y_1(x) = k_2 y.$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}.$$

$J_v(x)$

$r=-\nu$时

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

$J_\nu(x)$和$J_{-\nu}(x)$被称为"第一类贝塞尔函数"

生成函数：

$$g(x,t)=e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\,t^n$$

利用生成函数得到：

1) $J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$

2) $J_m(-x)=(-1)^m J_m(x)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial t}=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} nJ_n t^{n-1}\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial x}=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} J_n'(x)\,t^n\end{cases}$$

3) $J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$

4) $J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J'(x)$

5) $J_m(0)=\begin{cases}0 & m>0\\ 1 & m=1\end{cases}$

6) $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)]=x^n J_{n-1}(x)$

7) $\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$

积分形式

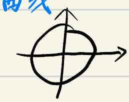
$g(x,t)=e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})}$ $\Rightarrow J_\nu(x)$

有积分关系

$$\oint_c \frac{g(x,t)}{t^{n+1}}\,dt = 2\pi i J_n(x).$$

其中 c是 环绕 t=0 奇点的封闭曲线

代换: $t=e^{i\theta}$, $dt=ie^{i\theta}d\theta$



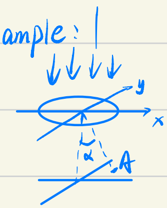
$$g(x,t)=e^{ix\sin\theta}$$

$$\Rightarrow 2\pi i J_n(x) = \int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\theta-n\theta)}\,d\theta$$

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta$$

Example:



$$\Phi = A\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi} e^{ibr\cos\theta}\,d\theta$$

$$b=\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha.$$

$$\Phi \sim 2\pi\int_0^a J_0(br)\,r\,dr$$

$$\sim 2\pi\int_0^a b^{-2}\frac{d}{dr}[brJ_1(br)]\,dr$$

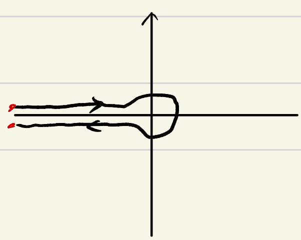
$$=\frac{2\pi a}{b}J_1(ab)$$

$$\Phi^2 \sim \left(\frac{J_1[ab]}{\sin\alpha}\right)^2$$

贝塞尔方程的非整数解:

Schlaefli Integral

$$\oint_c \frac{e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})}}{t^{n+1}}\,dt = 2\pi i J_n(x)$$



t=0 是一个支点

显然 $F_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})}}{t^{\nu+1}}dt$ $\to 0$ 满足Bessel方程

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{d}{dt}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{t^\nu}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right\}dt$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{t^\nu}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\Bigg|_{end} - \frac{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{t^\nu}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\Bigg|_{start}.$$

当 $t\to\infty$，$x\to\infty$ 成立。

即 $F_\nu(x)\to$ Bessel ODE 的解

若 x 不是足够大

$$F_\nu(x) \sim \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu e^{i\nu\pi}\int_c \frac{e^{-u}}{u^{\nu+1}}du.$$

利用 Gamma Function 去化简

$$\int_c e^{-\tau}\tau^\nu d\tau = 2ie^{i\nu\pi}\Gamma(\nu+1)\sin(\nu\pi)$$

得：

$$F_\nu \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\sin[(\nu+1)\pi]\Gamma(1-\nu)}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$F_{-\nu} \simeq \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.$$

2、诺伊曼函数

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

有时，取 $C_1=\cot\nu\pi$，$C_2=-\csc\nu\pi$ 得到一个特解，即：

$$Y_\nu(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)$$

ν 是非整数时显然满足 $N_\nu(x)$ 的存在

而对于整数时有：

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x)$$

有 Gamma 函数的关系

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

$$N_\nu(x) = -\frac{1}{\sin \nu\pi}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} - \dots\right] \qquad 0$$

$$= -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + \dots$$

利用洛必达

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{dJ_\nu}{d\nu} - (-1)^n \frac{dJ_{-\nu}}{d\nu}\right]_{\nu=n} \qquad 0$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left[\psi(k+1) + \psi(n+k+1)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k!}\left[-\gamma + H_k\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$= \frac{2}{\pi} J_0(x)\left[\gamma + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right] - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k!} H_k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

其中 H_k 称为调和数 (Harmonic number) $\sum_{m=1}^{k} m^{-1}$

$\gamma \to$ Euler Constant.

Wronskian Formulas:

给出一个 ODE

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

对于自共轭（$q=p'$）有 u, v 解 满足如下关系：

$$u(x)v'(x)-u'(x)v(x)=\frac{A}{p(x)}$$ ：Wroskian Formular

$$xy''+y'+\left(x-\frac{v^2}{x}\right)y=0 \qquad p(x)=x$$

$$J_v J_{-v}'-J_v'J_{-v}=\frac{A_v}{x}$$

A_v → 依赖于 v 的常数

$$J_v\to\frac{1}{\Gamma(1+v)}\left(\frac{x}{2}\right)^v \qquad J_v'\to\frac{v}{2\Gamma(1+v)}\left(\frac{x}{2}\right)^{v-1}$$

代入其中：

$$J_v(x)J_{-v}'(x)-J_v'(x)J_{-v}(x)=\frac{-2v}{x\Gamma(1+v)\Gamma(1-v)}=\frac{-2\sin v\pi}{\pi x}$$

$$A_v=-\frac{2}{\pi}\sin v\pi$$

1) $J_vY_v'-J_v'Y_v=\frac{2}{\pi x}$

2) $J_vY_{v+1}-J_{v+1}Y_v=\frac{-2}{\pi x}$

3. 汉克尔函数

汉克尔函数是具有渐近特性的 Bessel ODE 的解

球、圆柱 波传播问题。

定义：$H_v^{(1)}(x)=J_v(x)+iY_v(x)$

$$H_v^{(2)}(x)=J_v(x)-iY_v(x)$$

级数展开的形式：

$$H_0^{(1)}(x)\simeq i\frac{2}{\pi}\ln x+1+i\frac{2}{\pi}(\gamma-\ln 2)+\cdots$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \simeq -i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \cdots \quad \nu>0$$

$$H_0^{(2)}(x) \simeq -i\frac{2}{\pi}\ln x + 1 - i\frac{2}{\pi}(\gamma-\ln 2) + \cdots$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \simeq i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \cdots \quad \nu>0$$

γ是 Euler Constant.

递推公式：

$$H_{\nu-1}(x) + H_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}H_\nu(x)$$

$$H_{\nu-1}(x) - H_{\nu+1}(x) = 2H_\nu'(x)$$

也满足 Wronskian formulas

$$H_\nu^{(2)}(x)H_{\nu+1}^{(1)}(x) - H_\nu^{(1)}H_{\nu+1}^{(2)} = \frac{4}{i\pi x}$$

$$J_{\nu-1}H_\nu^{(1)} - J_\nu H_{\nu-1}^{(1)} = \frac{2}{i\pi x}$$

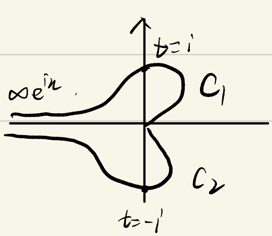
$$J_{\nu-1}H_\nu^{(2)} - J_\nu H_{\nu-1}^{(2)} = -\frac{2}{i\pi x}$$

积分表示的形式：

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{t^{\nu+1}}\,dt$$

不仅在割用上方和下方的实轴 $t=-\infty$ 处为0

正$t\to 0$ 时也为0.



$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}\frac{dt}{t^{\nu+1}}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{C_2} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}\frac{dt}{t^{\nu+1}}$$

由积分式得到

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)]$$

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)]$$

4、修正贝塞尔函数

修正贝塞尔方程

$$\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}P_\nu(k\rho) + \rho\frac{d}{d\rho}P_\nu(k\rho) - (k^2\rho^2+\nu^2)P_\nu(k\rho) = 0$$

改变边界件

$Z(z)$ 的齐次方程 $Z''+h^2Z=0$. $h^2=-\mu \geq 0$

当 $\mu<0$ 时，即有之前的方程.

解：

$$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

虚宗量贝塞尔函数

m 是 $I_m(x) = I_m(x)$

寻另解：

$$H_\nu^{(1)}(ix) = J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)$$

$$= J_\nu(ix) + i\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(ix)}{\sin\nu\pi}$$

且 $H_\nu^{(1)}(x) = \frac{e^{-i\frac{\nu}{2}\pi}}{-i}\frac{I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\pi}{2}\nu}H_\nu^{(1)}(ix)$$
$$=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

↑虚宗量汉克尔函数，这两个便是线性独立的特解.

递推式：

$$J_{\nu-1}(ix)+J_{\nu+1}(ix)=\frac{2n}{ix}J_n(ix)$$

$J\to I$： $J_\nu(ix)=i^\nu I_\nu(x)$

$$i^{\nu-1}I_{\nu-1}(x)+i^{\nu+1}I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{ix}i^\nu I_\nu(x)$$

1) $I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_\nu(x)$

2) $I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=2I_\nu'(x)$

$K_\nu(x)$：

1) $K_{\nu-1}(x)-K_{\nu+1}(x)=-\frac{2\nu}{x}K_\nu(x)$

2) $K_{\nu-1}(x)+K_{\nu+1}(x)=-2K_\nu'(x)$

积分形式：

$$I_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cosh(x\cos x)d\theta$$
$$K_0=\int_0^{+\infty}\cos(x\sinh t)dt=\int_0^\infty\frac{\cos(xt)dt}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}\quad x>0$$

⋮

5、球贝塞尔函数.

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0$$

若将 $x=kr$ $R=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,y(x)$ ↑代入

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+[x^2-(l+\tfrac{1}{2})^2]y=0$$

线性独立解

对 $l+\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔方程 有如下几个解

$J_{l+\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-(l+\frac{1}{2})}(x)$, $N_{l+\frac{1}{2}}(x)$, $H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$, $H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$.

则有: 球贝塞尔函数:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

$$j_{-l}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{-l-\frac{1}{2}}(x)$$

球诺依曼函数

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, N_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

球汉克尔函数:

$$h^{(1)}_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

$$h^{(2)}_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

另: $z_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, Z_{l+\frac{1}{2}}(x)$

$$Z_{l-\frac{1}{2}}(x) + Z_{l+\frac{3}{2}}(x) = \frac{2l+1}{x} Z_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

用 z 表示

$$z_{l-1}(x) + z_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{x} z_l(x) \qquad \square$$

之前的递推

1) $\frac{d}{dx}\left[z_l / x^l\right] = -z_{l+1}(x) / x^l$

2) $\frac{d}{dx}\left[x^{l+1} z_l(x)\right] = x^{l+1} z_{l-1}(x)$

$$z_l'(x) - \frac{l z_l(x)}{x} = -z_{l+1}(x)$$

$$z_l'(x) + \frac{l+1}{x} z_l(x) = z_{l-1}(x)$$

$$Z_{l-1}(x) - Z_{l+1}(x) = 2Z_l'(x) + \frac{Z_l(x)}{x}$$

将🔲代入

$$Z_l'(x) = \frac{l Z_{l-1}(x) - (l+1) Z_{l+1}(x)}{2l+1} \quad \square$$

级数表示式：

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(l+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}+2k}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(l+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}+2k} x^{l+2k}$$

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} j_{-(l+1)}(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k-l+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+2k-\frac{1}{2}} x^{-l+2k-1}$$

当 $x \to 0$，$n_l(x) \to \infty$

引入渐近公式

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l+1}{2}\pi\right)$$

$$n_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l+1}{2}\pi\right)$$

$$h_l^{(1)}(x) \sim \frac{1}{x} e^{ix} (-i)^{l+1}$$

$$h_l^{(2)}(x) \sim \frac{1}{x} e^{-ix} i^{l+1}$$

虚宗量球贝塞尔函数

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - [k^2r^2 + l(l+1)]R = 0$$

对应的虚宗量函数

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} K_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

递推式：

1) $i_{n-1}(x) - i_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} i_n(x)$

2) $n i_{n-1}(x) + (n+1) i_{n+1}(x) = (2n+1) i_n'(x)$

3) $k_{n-1}(x) - k_{n+1}(x) = -\frac{2n+1}{x} k_n(x)$

4) $n k_{n-1}(x) + (n+1) k_{n+1}(x) = -(2n+1) k_n'(x)$

当 X 比较小

$$i_n(x) \simeq \frac{x^n}{(2n+1)!!} \qquad k_n(x) \simeq \frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}$$

当X比较大时：

$$i_n \sim \frac{e^x}{2x}, \quad k_n(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}$$