Legendre Fuctions.

对 Laplace方程 和亥姆霍兹方进行分离变数，得到球函数方程.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0$$

$Y(\theta,\varphi)$ → 球函数，对球函数进行分离变数

$$Y(\theta,\varphi)=(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)\,\Theta(\theta)$$

$x=\cos\theta$ ↑ 从连带勒让德方程解

1、勒让德函数

我们研究 $m=0$ 情况

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0$$

$$\Rightarrow y''-\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)y'+\left[\frac{l(l+1)}{1-x^2}\right]y=0 \Rightarrow \begin{cases} p(x)=-\dfrac{2x}{1-x^2} \\ q(x)=\dfrac{l(l+1)}{1-x^2}\end{cases}$$

在 $x_0=0$ 处 $p(x_0)=0$，$q(x_0)=l(l+1)$ ⇒ 有限值，它们在 $x_0=0$ 处是解析的，因此 $x_0=0$ 是方程的常点，解应有泰勒级数的形式

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

代入勒让德方程，常数项，x，x^2... 每一项系数都应为0，可得到一般式.

$$a_{k+2}=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

$$a_{k+2}\sim a_{k-2}$$

$$\vdots$$

$$a_{l-2n}=(-1)^n\frac{(2l-2n)!}{n!\,2^l(l-n)!\,(l-2n)!}$$

⇒ 特解：

$$P_l(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{(2l-2k)!}{2^l\,k!\,(l-k)!\,(l-2k)!}x^{l-2k}$$

取整

勒让德多项式

前几阶勒让德多项式

$P_0(x)=1$

$P_1(x)=x=\cos\theta$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)$

$P_3(x)=\frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta)$

$P_4(x)=\frac{1}{64}(35\cos 4\theta+2\cos 2\theta+9)$

$\vdots$

我们也可以计算 $P_l(0)$ 当 $l=2n+1$ $P_{2n+1}(0)=0$

$l=2n$ 时

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!\,2^n n!}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

1) 勒让德微分形式

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

罗德里格斯公式

Proof: 用二项式定把 $(x^2-1)^l$ 展开

$$\frac{1}{2^l l!}(x^2-1)^l=\frac{1}{2^l l!}\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{(l-k)!k!}(x^2)^{l-k}(-1)^k=\underbrace{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\frac{1}{2^l k!(l-k)!}x^{2l-2k}}$$

只需要保留 $2l-2k\geq l$ 项 ← 求导 l 次

↓ $k\leq\frac{l}{2}$ 的项

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \qquad \square$$

2) 积分表示

利用柯西积分的导数形式，微分形式⇒围道积分

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz$$

这就是勒让德多项的 Schlaefli 积分

也可表示为定积分形式，圆心 $z=x$，半径是 $\sqrt{|x^2-1|}$，在C上 $z-x=\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}$

$dz=i\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}d\psi$

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[(x+\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi})^2-1]^l}{(\sqrt{x^2-1})^{l+1}(e^{i\psi})^{l+1}}\cdot[i\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}]d\psi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}+(x^2-1)e^{2i\psi}-1}{2\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}}\right]^l d\psi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\,\frac{1}{2}(e^{-i\psi}+e^{i\psi})\right]^l d\psi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x+i\sqrt{1-x^2}\cos\psi]^l d\psi$$

$$P_l(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x+i\sqrt{1-x^2}\cos\psi]^l d\psi$$

称为拉普拉斯积分

生成函数

$$g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

2、正交性

Legendre ODE 是自共轭的，$P''(x)$ 的系数在 $x=\pm1$ 为0，则在 $(-1,1)$ 对于不同的 n 在 $\rho(x)=1$ 是正交的

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

P_n的定义并不能保证它们被规范化，我们建立归一化的方法是生成函数平方，得，

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n\right]^2$$

从$(-1,1)$积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx$$

令$y = 1-2tx+t^2 \quad dy = -2t dx$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

级数展开：

$$\frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}$$

系数对应相等

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

结合正交性；

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}$$

勒让德级数

由于勒让德多项式的正交性，可以将其作为一组基来表示$f(x)$在$(-1,1)$上的定义。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

正交性保证了其展开是唯一的.

Laplace 方程的解

球坐标形式：

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}(A_{lm}r^{l}+B_{lm}r^{-l-1})P_l^m(\cos\theta)(A'_{lm}\sin m\varphi+B'_{lm}\cos m\varphi)$$

l是整数，我们与φ无关的解：

$$\psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(a_l r^l+b_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

加以边界条件

$$r\le r_0:\ \psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$r>r_0\quad \psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^{-l-1}P_l(\cos\theta)$$

3. 生成函数与其物理情景

如果我们在z方向放置一个q电荷，我们用极坐标形式写出电势

$$\psi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}$$

改写一下

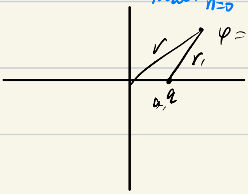
$$\psi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}g(\cos\theta,\frac{a}{r})$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

若 $r<a$

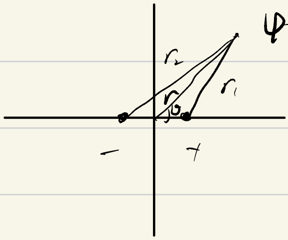
$$\psi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{2r}{a}\cos\theta+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^n\quad(r<a)$$



$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

电偶极矩



$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

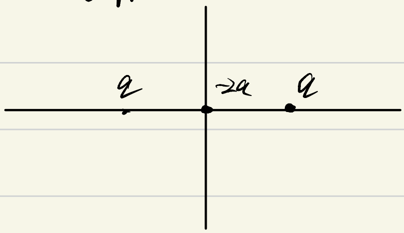
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(-\frac{a}{r}\right)^n\right]$$

$$\psi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{a}{r}P_1(\cos\theta) + \frac{a^3}{r^3}P_3(\cos\theta) + \dots\right]$$

$a \ll r$

$$\psi = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} \qquad \mu = 2qa.$$

考虑电四极子的展开



$$\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_i q_i + \sum_i \frac{q_i a_i}{r}P_1(\cos\theta) + \sum_i \frac{a_i^2 q_i}{r^2}P_2(\cos\theta) + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\mu_0 + \frac{\mu_1}{r}P_1(\cos\theta) + \dots\right]$$

μ_i 称多偶极矩.

4、连带勒让德方程&函数

$$(1-x^2)P''(x)-2xP'(x)+\left[\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x)=0$$

$x_0=0$ 是方程的常点，我们可以利用 $x_0=0$ 的邻域的级数展开求解：

代换：

$$P=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y$$

$$P'=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y'-mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}y$$

$$P''=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y''-2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}y'+\left[-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}+(m^2-2m)x^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}\right]y$$

代入连带勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2x(m+1)y'+[\lambda-m(m+1)]y=0 \qquad \square$$

代入级数解：

$$a_{k+2}=a_j\left[\frac{j^2+(2m+1)j-\lambda+m(m+1)}{(j+1)(j+2)}\right]$$

Complex，选择更简单的方法

In fact，□方程就是勒让德方程逐项求导m次的方程

则 $y(x)=P^{(m)}(x)$

则知：$P=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{[m]}(x)$

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{[m]}(x)$$

求导

$P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta$

$P_2^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} 3x = \frac{3}{2}\sin 2\theta$

$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = 3\sin^2\theta$

$\vdots$

微分形式

罗德里格斯公式:

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

$l-m=2n$ 时 $P_l^m(x)$ 为偶

$l-m=2n+1$ 时 $P_l^m(x)$ 为奇

当 $m \to -m$

$$P_l^{-m} = \frac{(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l$$

$$\frac{P_l^m(x)}{P_l^{-m}(x)} = \frac{(1-x^2)^m d^{l+m}(x^2-1)^l/dx^{l+m}}{d^{l-m}(x^2-1)^l/dx^{l-m}} = \text{Constant}.$$

只看最高幂项之比

$$(-1)^m x^{2m} \frac{(2l)!}{(l-m)!} x^{l-m} : \frac{(2l)!}{(l+m)!} x^{l+m} = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

我们得到:

$$\begin{cases} P_l^m(x) = (-1)^m \dfrac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x) \\ P_l^{-m}(x) = (-1)^m \dfrac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \end{cases}$$

积分表示: Schlaefli Integral.

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l}\frac{1}{2\pi i}\frac{(l+m)!}{l!}\oint\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}}dz$$

也可表示为定积分 圆心 $z=x$，$r=\sqrt{x^2-1}$

$$P_l^m(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\oint_c\left(i\frac{z-x}{e^{i\varphi}}\right)^m\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}}dz$$

$$=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi}e^{im\varphi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\pm(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\right]^l d\varphi$$

将 $x\to\cos\theta$

$$P_l^m(x)=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi}e^{im\varphi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi]^l d\varphi$$

拉普拉斯积分

正交关系：

同一 m 而不同阶 l 的情况在 $(-1,1)$ 正交的

$\triangle$ $\int_{-1}^{+1}P_k^m(x)P_l^m(x)dx=0\quad(k\neq l)$

$$\int_{-1}^{+1}P_p^m(x)P_q^m(x)dx=\frac{(-1)^m}{2^{p+q}p!q!}\int_{-1}^{1}R^m\left(\frac{d^{p+m}R^p}{dx^{p+m}}\right)\left(\frac{d^{q+m}R^q}{dx^{q+m}}\right)dx$$

若 $p<q$，令

$$u=R^m\left(\frac{d^{p+m}R^p}{dx^{p+m}}\right)\qquad dv=\left(\frac{d^{q+m}R^q}{dx^{q+m}}\right)dx$$

对于 $p+m+1\leq q+m$ 积分会为 0.

$$\frac{d^{p+m+1}}{dx^{p+m+1}}u=\frac{d^{p+m+1}}{dx^{p+m+1}}\left[R^m\left(\frac{d^{p+m}R^p}{dx^{p+m}}\right)\right]$$

$$\frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}}\left[R^m\left(\frac{d^{p+m}R^p}{dx^{p+m}}\right)\right]=\frac{(p+m)!}{(p-m)!}(2p)!$$

$$\int_{-1}^{1}[P_p^m(x)]^2dx=\frac{(-1)^{2m+p}}{2^{2p}p!p!}\frac{(p+m)!}{(p-m)!}(2p)!\boxed{\underbrace{\int_{-1}^{1}R^p dx}_{\text{beta function}}=(-1)^p\frac{2^{2p+1}p!p!}{(2p+1)!}}$$

我们能得到：

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x) P_q^m(x)\,dx = \frac{2}{2p+1}\frac{(p+m)!}{(p-m)!}\delta_{pq}$$

5、 球函数

球方程：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0$$

解为：

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\underbrace{\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}}\quad\begin{pmatrix}m=0,1,2,\dots l\\ l=0,1,2\dots\end{pmatrix}$$

↓ 是线性独立的，可任其一来表示，也可由其线性组合.

l 为球函数的阶.

复数形式

线性独立 l 阶球函数 $2l+1$ 个

$m=0 \to P_l(\cos\theta)$

$m=1 \to \sin m\varphi P_l^m$, $\cos m\varphi P_l^m$

重新组合：

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}\quad\begin{cases}m=-l\dots 0,\dots l\\ l=0,1,2\dots\end{cases}$$

球函数也是正交的.

$$\iint_S Y_l^m(\theta,\varphi)\, Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)\, P_k^n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix} d\varphi$$

$$= \int_{-1}^{+1} P_l^m(x)\, P_k^n(x)\, dx \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix} d\varphi$$

$= 0 \quad (m \neq n \text{ or } l \neq k)$

完整解:

我们有方程:

$$R'' + \frac{2}{r}R' + [f(r) - l(l+1)]R = 0$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\varphi^2} + l(l+1)\right] Y_l^m(\theta,\varphi) = 0$$

其解可以写为:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-l-1}\right) Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$Y_0^0(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

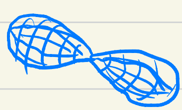
$$Y_1^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{(x+iy)}{r}$$

Figure:

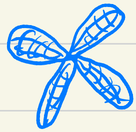
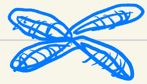
$m=0 \quad l=0$

$l=1 \quad m=0$

$l=1 \quad m=1$



$m=0 \quad l=2$ $\qquad$ $m=1 \quad l=2$ $\qquad$ $m=2 \quad l=2$

球谐函数 → 完备性

在球面计算的任何函数 $f(\theta,\varphi)$ 都可以在均匀收敛的双级球谐函数中展开:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{lm}Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$C_{lm}=\langle Y_l^m|f(\theta,\varphi)\rangle=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, Y_l^m(\theta,\varphi)^{*} f(\theta,\varphi)$$

6. 第二类勒让德函数

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'-\frac{l(l+1)}{1-x^2}y=0$$

给出:

$$Q_l(x)=P_l(x)\int^x\frac{\exp\left[\int^x 2x/(1-x^2)\,dx\right]}{[P_l(x)]^2}dx$$

$$=P_l(x)\int^x\frac{dx}{(1-x^2)[P_l(x)]^2}$$

代表的:

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$Q_1(x)=\frac{1}{2}P_1(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-1$$

求和式：

$$Q_l(x)=\frac{1}{2}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}x^{l-1-2k}\cdot\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n+m}}{2k-2n+1}\cdot\frac{(2l-2n)!}{n!(l-n)(l-2n)!}\quad(l\geq 1)$$