复变函数

1.1 复数与复变函数

$z = x + iy$

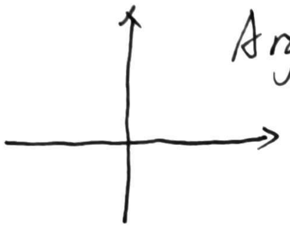
共轭复数

$z = x + iy$

两种典型的形式 { 直角 $z = x + iy$; 极坐标 $z = re^{i\theta}$ → 欧拉公式

r → 模长，θ → 辐角

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$



Argrand diagram 复平面

As for polar coordinate:

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

根式 $n \to \frac{1}{n}$

Warning:

$e^{i2n\pi} = 1$ 也就意味着 z 的辐角不能唯一确定

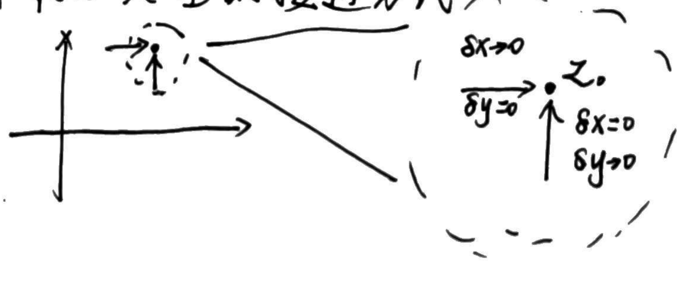
1.2 柯西-黎曼条件 Cauchy-Riemann Conditions.

导数的定义：

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{(z+\delta z) - z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f(z)}{\delta z} = f'(z)$$

与接近方式无关. 也就是极限值是统一的

考察两种最为典型的接近方式



考虑两个变化量 δx 和 δy

有 $\delta z = \delta x + i\delta y$

给定一个函数 $f = u + iv$

$\delta f = \delta u + i\delta v$

则：
$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y}$$

当 $\delta y = 0$，$\delta x \to 0$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta f}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{\delta u}{\delta x} + i\frac{\delta v}{\delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

当 $\delta x = 0$，$\delta y \to 0$

$$\lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta f}{\delta y} = \lim_{\delta y \to 0}\left(-i\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y}\right) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial v}.$$

极限相等（复数的硬性要求）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$ 柯西-黎曼条件

相反地，如果复变函数满足 C-R 条件那么其实部 u 和虚部 v 的偏导数一定是连续的，微分就一定存在

解析函数

1. 如果 $f(z)$ 在复平面的一个区域内可微且单值的
   则其称为该区域内的解析函数.

2. 对于一个复变函数 $f(z)$，其在复平面上都是解析的，我们可以称其为全纯函数.

3. 如果 $f(z_0)$ 在 $z = z_0$ 处不存在导数，则 z_0 被称为奇异点

解析函数的实部和虚部，一定满足拉普拉斯方程.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

如果 $f(x)$ 解析，u, v 是复变函数的共轭调和函数

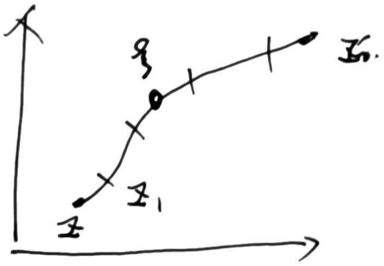
解析函数的导数 是和实变函数 类似的

$$[fg]'=f'g+g'f$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

1.3. 柯西积分定理

围道积分



分成 n 段 $z_0, z_1, \dots, z_n$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})=\sum f(\xi_k)\Delta z_k.$$

当 $n\to\infty$ 时 且满足所有 $|z_k-z_{k-1}|\to 0$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi)(z_k-z_{k-1})=\int_{z_0}^{z_n} f(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz$$

用 $z=x+iy$ $f=u+iv$ 展开来看.

$$\int_C f(x)\,dz=\int_C [u(x,y)+iv(x,y)][dx+idy]$$

$$=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$$

还有一些性质

1. 常数因子可以移到积分之外
2. 函数的和的积分等于各个积分的和

3. 反转积分的路径，积分值变号

4. 完整的路径的积分等于积分的和.

5. 有积不等式

$$\left|\int_l f(z)dz\right| \leq \int_l |f(z)||dz|$$

6. 积分不等式

$$\left|\int_l f(z)dz\right| \leq ML$$

其中M是$|f(z)|$在l上的最大值，L是l的全长

柯西定理.

积分依赖于路径的选取的

1) 单连通情况

$f(z)$在B区域上是解析的，则在该区域任一闭合曲线的线积分值一定为0.

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

很好证明：

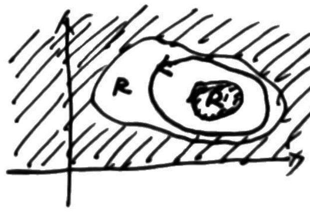
Proof:
$$\oint_c f(z)dz = \oint_c udx - vdy + i\oint_c vdx + udy$$
$$= -\iint\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$
$$= 0$$

C-R Conditions　　C-R Conditions

2) 复连通的情况

存在子区域 or 点不解析时

可以利用额外的闭曲线包绕起来，从而排除出去



规定逆时针为正.

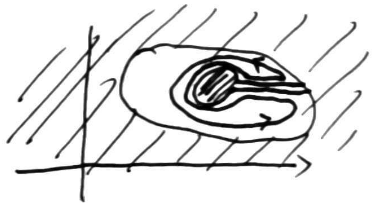
那么柯西定理可表述为

如果 $f(z)$ 是复连通区域上的单值函数，则有

$$\oint_l f(z)dz = -\sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} f(z)dz$$

式子中 l 为区域外界线，各个 l_i 为区域边界线，积分均沿边界线的正方向积分

Proof:



搭桥

有一个实用的积分

$$\oint (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i & n=-1 \end{cases}$$

柯西积分公式

$$\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

Proof: 写成极坐标的形式

$z = z_0 + re^{i\theta}$，$dz = ire^{i\theta}$ 积分从 $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}d\theta$$

利用复连通的处理方法，令 $r \to 0$ $z=z_0$ 处围绕

$$\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0} = if(z_0)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

同时如果 z_0 在曲线之外，那显然为 0

完整的柯西公式为

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0} = \begin{cases} f(z_0) & 点在圈内 \\ 0 & 点在圈外 \end{cases}$$

洛朗级数.

有奇点 → 考虑一个环域上的展开

考虑一个环域是. $R_2<|z'-z_0|<R_1$ → 收敛环

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z')dz'}{z'-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z')dz'}{z'-z}$$

C_2 的积分方向与 C_1 相反的

利用泰勒展开.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint\frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\oint_{C_2}(z'-z_0)^{n-1}f(z')dz'$$

↓

柯西定理

$C_2\to C_1$

最后. 仍有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

其中 $a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$

$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 解析部分

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^{-n}$ 主要部分

C为环域内沿正方向绕内一周的任一闭合曲线

上式称为$f(z)$的洛朗展开.

Tips: 尽管大同小异, z_0是否是奇点.

洛朗级数、$a_k\neq f^{(k)}(z_0)/k!$ 因为不在域内处处解析

另外 洛朗级数也是唯一的

孤立奇点的分类.

孤立奇点: z_0 $f(z)$在该处不可导, 而在z_0的任意小邻域内除z_0可导

非孤立奇点: 若z_0的无论多么小的邻域内总可以找到除z_0以外的不可导的点.

积分的导数

$$f'(z) = \frac{1!}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

反复求导

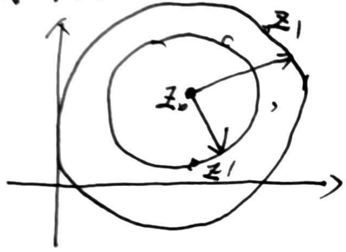
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

莫雷拉定理

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续，并且沿着 D 内任何一条可求长闭曲线 γ 的积分恒等于零，那么 $f(z)$ 在区域 D 内解析

1.5 级数展开

泰勒展开



从 $z=z_0$ 展开．假设 $|z_1-z_0|$ 内都是解析的

半径 $|z-z_0|$

柯西公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{z'-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z_0)\left[1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right]}$$

有级数关系

$$1+t+t^2+\dots = \sum t^n = \frac{1}{1-t}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(z')dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ 泰勒展开的表达式

$$|z-z_0| = \underbrace{|z_1-z_0|}_{\text{收敛半径}}$$ 收敛圆

洛朗级数 $\begin{cases} \text{解析部分} \to \text{正幂部分} \\ \text{主要部分} \to \text{负幂部分} \end{cases}$

奇点.三种类型

没有负幂项 → 可去奇点

只有有限个负幂项。极点

无限个负幂项 → 本性奇点.

对于可去奇点.:

显然 $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0$ 邻域上有界

若定义 $g(z) = \begin{cases} f(z) & (z \neq z_0) \\ a_0 & (z = z_0) \end{cases}$

就是 $g(z)$ 的泰勒展开，所以 z_0 为"可去".

对于极点:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

显然有 $\lim_{z\to z_0} f(z) = +\infty$

其中 m 为极点 z_0 的阶，一阶极点称为单极点.

如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，$z\to z_0$ 时的 $f(z)$ 的极限方式随趋于 z_0 的方式而定

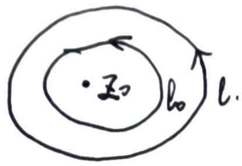
$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \begin{cases} +\infty & \text{正实轴} \\ -\infty & \text{负实轴} \\ 0 & \text{虚轴} \end{cases}$$

讨论孤立奇点在无限远点情况 只要将 $z \to \frac{1}{z}$ 与之上同理

1.6 留数定理.

留数定理.

对于一个孤立奇点



我们有洛朗级数

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

且有柯西定理.

$$\oint_l f(z)\,dz = \oint_{l_0} f(z)\,dz$$

逐项积分

$$\oint_{l_0} f(z)\,dz = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\oint_{l_0} (z-z_0)^k\,dz}_{k=-1\text{时 积为 }2\pi i}$$

则可以化简为

$$\oint_l f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

其中 a_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 的留数. 通常记为 $\mathrm{Res} f(z_0)$

$$\oint_l f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res} f(z_0).$$

对于包围多个奇点也有类似结论

则留数定理:

设函数 $f(z)$ 在回路 l 所围区域 B 上除有限个孤立奇点 $b_1, b_2 \dots b_n$ 外解析, 在闭区域 $\bar{B}$ 上除 $b_1 \dots b_n$ 外连续, 则

$$\oint_l f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res} f(b_j)$$

计算 1. 洛朗展开

2. 极限 (单极点) $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$

$$(z-z_0) f(z) = a_{-1} + a_0 (z-z_0) + a_1 (z-z_0)^2 + \dots$$

$\lim\limits_{z\to z_0} [(z-z_0) f(z)]$ = 非零的有限值, 即 $\mathrm{Res} f(z_0)$

如果 $f(z)$ 可以表示为 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的特殊的形式

其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 处解析，z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点. $P(z_0)$ 和

从而 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\mathrm{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

设 z_0 $f(z)$ 的 m 阶极点. 留数可以得 :

$$\mathrm{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}$$

例子：求 $f(z)=\frac{1}{z^n-1}$ 在 $z=1$ 的留数

$$f(z)=\frac{1}{z^n-1}=\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+\cdots+z+1)}$$

$$\mathrm{Res} f(z_0)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+\cdots+z+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{n}$$

例子：计算沿单位圆 $|z|=1$ 的回路积分

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}.$$

求极点. $\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=0$ 得 $z=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

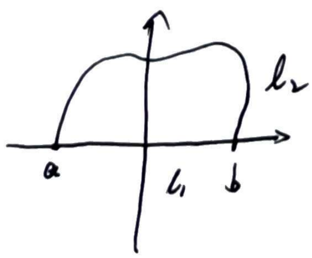
单极点. $z=\frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 不在圆点内

而只需考虑另一个极点

计算留数 $\mathrm{Res} f\left(\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(\varepsilon z^2+2z+\varepsilon)'}=\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

因此 $\oint\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}=\frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

实变函数的应用



类型一 $\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)\,dx.$ 代换 $z=e^{ix}$

则有 $\cos x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$ $\sin x=\frac{1}{2i}(z-z^{-1})$ $dx=\frac{1}{iz}dz$

原积分式化为

$$I=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

类型二. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 积分区间 $(-\infty,+\infty)$ 在实轴无奇点

通常理解为

$I=\lim\limits_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to\infty}}\int_{R_1}^{R_2}f(x)dx$ 当 $R_1=R_2\to\infty$ 时极限存在，称为

积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 的主值

根据留数定理

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\{$上半平面所有奇点的留数之和

类型三. $\int_{0}^{+\infty}F(x)\cos mx\,dx$，$\int_{0}^{+\infty}G(x)\sin mx\,dx$

偶函数 $F(z)$ 和奇函数 在实轴没有奇点，在上半平面外有限个奇点是解析的，当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时 $F(z)$ $G(z)\to 0$.

将 $\cos mx=\frac{1}{2}(e^{imx}+e^{-imx})$ 代入变换得：

$\sin mx=\frac{1}{2i}(e^{imx}-e^{-imx})$

$$\left.\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}F(x)\cos mx\,dx&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{imx}dx\\ \int_{0}^{+\infty}G(x)\sin mx\,dx&=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)e^{imx}dx\end{aligned}\right\}$$

约当定理

↓

：若 m 为正数，C_R 是以原点为圆心而位于上半平面的半圆周

在上半平面及实轴上 $\to\infty$ 时，$F(x)$ 一致地 $\to 0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)e^{imz}dz=0$$

综上前的有

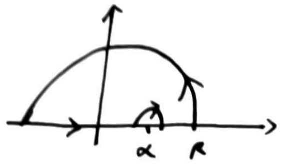
$\int_{0}^{+\infty}F(x)\cos mx\,dx=\pi i\{F(z)e^{imz}$ 在上半平面的留数之和$\}$

$\int_{0}^{\infty}G(x)\sin xm\,dx=\pi\{G(z)e^{imz}$ 在上半平面所有奇点的留数之和$\}$

实轴上有单极点的情形.

考虑积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 有极点 $z=\alpha$

构造积分回路



取极限 $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$

$$\oint_l f(z)dz = \int_{-R}^{\alpha-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$$

洛朗展开

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + P(z-\alpha).$$

留数　解析部分 $=0$

则得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{上半}} \operatorname{Res} f(z) + \pi i \operatorname{Res} f(\alpha)$$