FURTHER Topics on Analysis

2.2. Orthogonal Polynomials (正交多项式)

Rodrigues Formulas

考虑一个 Second-order Sturm-Liouville ODE of the in general form

$$p(x)y''+q(x)y'+\lambda y=0.$$

其中 $p(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$　$q(x)=\mu x+\nu$.

我们可以写出 y 关于一个正交多项式的形式

$$y_n(x)=\sum_{j=0}^{n} g_j x^j \qquad g_n \text{为非零的}.$$

假设 $y_n=g_n x^n$ 代入、对应系对应得到

$$n(n-1)\alpha g_n+n\mu g_n+\lambda g_n=0$$

则 y_n 对应的特征值为 $\lambda_n=-n(n-1)\alpha-n\mu$

根据之前的结论

如果方程不是自共轭的则

$$(wp)'=wq \qquad \text{引入一个函数}.$$

则有解

$$w=\frac{1}{p}\exp\left(\int^{x}\frac{q(x)}{p(x)}dx\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dx}[wpy']+\lambda wy=0.$$

得到 Rodrigues formula.

$$y_n(x)=\frac{1}{w}\left(\frac{d}{dx}\right)^n[wp^n(x)]$$

Example:　$y''-2xy'+\lambda y=0.$

$p=1 \quad q=-2x$

$$w = \exp\left(\int^x (-2x)\,dx\right) = e^{-x^2}$$

代入得

$$y_n(x) = \frac{(-1)^n}{w}\left(\frac{d}{dx}\right)^n [w p^n] = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

Schlaefli Integral

$$y_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{w(z)[p(z)]^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz$$

c 是包围 x 点，且 $w(z)[p(z)]^n$ 是解析的沿着 c。

Generating Functions.

给一集合的函数 $f_n(x)$

若 $f(x)$ 可写 $g(x,t)$ 的幂系数，则称为生成函数。

$$g(x,t) = \sum_n C_n f_n(x) t^n = \sum \mathrm{Res}$$

结合留数定理，可得

$$C_n f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g(x,t)}{t^{n+1}}\, dt.$$

又有许多有意思的衍生关系

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \sum_n n C_n f_n(x) t^{n-1} = \sum_n (n+1) C_{n+1} f_{n+1}(x) t^n$$

Example : Hermite Polynomials.

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

得到递推关系.

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-t^2+2tx} = (2x-2t) e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0} n H_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!}$$

$$\sum 2x H_n \frac{t^n}{n!} - \sum 2 H_n \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum n H_n \frac{t^{n-1}}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) = H_{n+1}(x)$$

对于斯图姆-刘维尔定理问题.

结合 Schlaefli integral

$$g(x,t)=\frac{1}{w(x)}\sum_{n\geq 0}^{\infty}C_n t^n \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{w(z)[p(z)]^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$

2.2. Bernoulli Numbers

对于 $\frac{x}{e^x-1}$ 的生成函数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k x^k}{k!}$

将其级数展开.

$f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ $\quad \lim=1$

$f'(x)=\frac{e^x x-e^x+1}{(e^x-1)^2}$. $\quad \lim=-\frac{1}{2}$

$f''(x)=\frac{e^{2x}x+e^x x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$ $\quad \lim=\frac{1}{6}$

$\vdots$

则由定义知: $B_n=\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{x}{e^x-1}\right]$

且满足如下关系

$B_0=1 \quad \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0$

也可表示为 $B_0=1 \quad B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \quad n\geq 1$

考虑复变函数 $f(z)=\frac{z}{e^z-1}=\sum B_n\frac{z^n}{n!}$

假设 $|z|=1$ 则知 $f(z)$ 在 C 上解析的

那么、对于

$$\frac{f(z)}{z^{2n+2}}=\frac{B_0}{0!}z^{-2n-2}+\frac{B_1}{1!}z^{-2n-1}+\dots+\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-1}+\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}$$

利用留数定理

$$\oint_C\frac{f(z)}{z^{2n+2}}dz=2\pi i\cdot\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$$

令 $e^{i\theta}=z$

$$B_{2n+1}=\frac{(2n+1)!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}e^{-2ni\theta-2i\theta}ie^{i\theta}d\theta.$$

$$=\frac{(2n+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-2\theta ni}}{e^{e^{i\theta}}-1}d\theta.$$

$$=\frac{(2n+1)!}{2\pi}\int_0^{\pi}-e^{-2ni\theta}d\theta=\begin{cases}0 & n\geq 1\\ -\frac{1}{2} & n=0\end{cases}$$

和余切的关系

$$g(x)=\frac{x}{e^x-1}=\frac{x(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})}{2(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})}$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$g(x)=\frac{x}{2}\coth\frac{x}{2}$$

展开：$\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}x^{2n}}{(2n)!}$

则 双曲余切：

$$\coth x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$$

将 $x\to ix$，得

$$\cot x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$$

黎曼 Zeta 函数

令 k 为实数 $|k|\geq 1$ 则

$$\zeta(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

结论：

$$\zeta(k)=\prod_p\left(\frac{1}{1-p^{-k}}\right).$$

Proof：

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^k}}=1+\frac{1}{p^k}+\cdots$$

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^k}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^k}}\right)\cdots\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{2k}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^k}\cdots\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5^k}+\cdots\right)$$

展开每一项的形式为

$$\frac{1}{p_1^{m_1 k} p_2^{m_2 k} \cdots p_n^{m_n k}}$$

且 $m_1, \dots, m_n$ 是整数.

根据算数基本定理:

每个正整数都有一个唯一的素数幂的因式分解:

因此:

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^k}}\right)\cdots = 1 + \frac{1}{2^k} + \cdots \quad \square.$$

另有结论:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{|B_{2k}|(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$

我们注意到

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right)$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x n}\left(2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2k+1}\right)$$

将 $k \to k+1$

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2x^{2k-1}}{(n\pi)^{2k}}\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^{2k-1}}{(\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^{2k-1}}{(\pi)^{2k}} \zeta(2n)$$

且 $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2B_{2k}(2x)^{2k-1}}{(2n)!}$

得 $\zeta(2k) = \frac{|B_{2k}|(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$

Question: 任取两个大于二的整数, 其互质的概率是多少

伯努利多项式:

$$B_k(y): \quad \frac{x e^{xy}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(y) x^k}{k!}$$

很明显 $y=0$

$$\frac{xe^{xy}}{e^x-1}=\frac{x}{e^x-1}$$

$$B_k(0)=B_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k(1)\frac{x^k}{k!}=\frac{xe^x}{e^x-1}=\frac{x}{1-e^{-x}}=\frac{-x}{1-e^{x}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B_k\frac{x^k}{k!}$$

则 $B_k(1)=(-1)^k B_k$

利用伯努利数的生成的函数得到伯努利多项式的递推关系：

$$B_k(y)=\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}B_n y^{k-n}.$$

另外，$B_k'(y)=kB_{k-1}(y)$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{xe^{xy}}{e^x-1}\right)=\frac{d}{dy}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(y)x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2e^{xy}}{e^x-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k'(y)x^k}{k!}$$

$k+1\to k$.

$$\text{so. }\frac{xe^{xy}}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{k+1}'(y)x^k}{(k+1)!}$$

$$B_{k+1}'(y)=(k+1)B_k(y)$$

又 $\int_0^1 B_k(y)dy=0\quad(k\geq1)$

$$=\frac{B_{k+1}(y)}{k+1}\Big|_0^1$$

$$=0.$$

有一些有趣的结论：

1. $B_k(y+1)-B_k(y)=ky^{k-1}$

2. $B_k(1-y)=(-1)^k B_k(y)$

3. $B_k(\frac{1}{2})=(2^{1-k}-1)B_k$

欧拉麦克劳林公式：

$a,b\in\mathbb{Z}$，f是$[a,b]$上的光滑函数，对于所有$m\geq 1$ $m\in\mathbb{N}$有

$$\sum_{i=a}^{b-1} f(i)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b+R_m$$

$$R_m=(-1)^{m+1}\int_a^b\frac{B_m(y-[y])}{m!}$$

Proof 数学归纳法

一：$a=0$，$b=1$，$m=1$

$$f(0)=\int_0^1 f(x)dx+B_1 f(x)\Big|_0^1+R_m$$

$$R_m=\int_0^1 B_1(x)f'(x)dx$$

且：$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt$

$$\int_0^1 f(x)dx$$

$$=f(0)+\int_0^1\int_0^x f(t)dtdx$$

$$=f(0)+\int_0^1\int_t^1 f(t)dxdt$$

$$=\sim+\int_0^1 f(t)(1-t)dt \quad (1)$$

$$=\sim+\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 f(t)(-t)dt$$

$$=f(1)+\int_0^1 f(t)(-t)dt \quad (2).$$

(1)+(2)得：

$$2\int_0^1 f(x)dx=f(0)+f(1)+\int_0^1 f(t)(1-t)dt+\int_0^1 f(t)(-t)dt$$

整理得

$$f(0)=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2}(f(1)-f(0))-\int_0^1 f(x)(\frac{1}{2}-x)dy$$

$$f(0)=\int_0^1 f(x)dx+B_1 f(x)\Big|_0^1+R_m \quad \square$$

此时，保持$a=0$和$b=1$不变，证明对于$\forall m\geq 1$有

$$f(0)=\int_0^1 f(x)dx+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_0^1+R_m$$

余项为：$R_m = (-1)^{m+1}\int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{m}(x)dx$

假设以上对所有 $k \le m$ 都成立

$$B'_{k+1}(x) = (k+1)B_k(x)$$

考虑：$\int_0^1 B_m(x) f^{m}(x)dx$

分部积分：

$$\int_0^1 B_m(x) f^{(k)}(x)dx = \frac{B_{k+1}(x)}{k+1} f^{(k)}(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{k+1}\int_0^1 B_{k+1}(x) f^{k+1}(x)dx$$

代入.

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\left[B_{m+1}(x) f^{m}(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 B_{m+1}(x) f^{m+1}(x)dx\right]$$

若 m 奇 $(-1)^{m+1} = 1$

m 偶 $(-1)^{m+1} = -1$ 则 $B_{m+1}(0) = B_{m+1}(1) = 0$.

因此，我们得到：

$$\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} B_{m+1}(x) f^{m}(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{(m+1)!} B_{m+1} f^{m}(x)\Big|_0^1$$

$f(0)$ 值变为

$$f(0) = \int_0^1 f(x)dx + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!} f^{k-1}(x)\Big|_0^1 + R_m \rightarrow \text{代入}.$$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \sum_{k=1}^{m+1}\frac{B_k}{k!} f^{k-1}(x)\Big|_0^1 + \frac{(-1)^{m+2}}{(m+1)!}\int_0^1 B_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x)dx.$$

完成了归纳。在证明的第二步中，对于每个整数 $a \le i \le b$ 求和

$$\sum_a^{b-1} f(i) = \sum_a^{b-1}\left[\int_i^{i+1} f(x)dx + \sum_{k=1}^{m+1}\frac{B_k}{k!} f^{k-1}(x)\Big|_i^{i+1} + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\int_i^{i+1} B_{m+1}(x) f^{m+1}(x)dx\right]$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m+1}\frac{B_k}{k!} f^{k-1}(x)\Big|_a^b + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\int_a^b B_{m+1}(x) f^{m+1}(x)dx \quad \square$$

也可以表示为

$$\sum_a^b f(n) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{2k-1}(b) - f^{2k-1}(a)\right) + R_p$$

余项的大小估计为

$$|R_p| \leq \frac{2\zeta(p)}{(2\pi)^p}\int_m^n |f^{(p)}(x)|dx$$

2.4 Dirichlet Series.

形如 $S(s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s}$

typical: $\zeta = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Example: 估 $\zeta(2)$ 的值

我们有: $S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi \coth \pi a}{2a} - \frac{1}{2a^2}$

级数展开: $\zeta(2) = \lim_{a\to 0} S(a) = \lim_{a\to 0}\left[\frac{\pi}{2a}\left(\frac{1}{\pi a} + \frac{\pi a}{3} + \dots\right) - \frac{1}{2a^2}\right] = \frac{\pi^2}{6}$.

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

ζ...

2.5 无限乘积

一般写如此的形状.

$$P = \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

换成累加

$$\ln \prod (1+a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$$

$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a_n < 1 \quad \text{收敛 }\text{时} \\ \text{与} \quad \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n \text{ 同敛散} \end{array} \right.$

由于 $1+a_n \leq e^{a_n}$

$p_n \leq e^{s_n}$ 让 $n \to \infty$

$\prod^{\infty}(1+a_n) \leq \exp\left(\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n\right)$

展开: $p_n = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\geq 1}^{n} a_i a_j + \dots \geq S_n$

则 $\prod^{\infty}(1+a_n) \geq \sum a_n$

$\downarrow \quad \downarrow$

diverge diverge

$\prod(1-a_n)$ 复杂 对于 $a_n<\frac{1}{2}$ 有

$(1-a_n)\le(1+a_n)^{-1}$ and $(1-a_n)\geqslant(1+2a_n)^{-1}$

Example:

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$ converge for all z

$$\cos z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)$$

用乘、考虑 $\sum a_n$ 的敛散.

For sin: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{z^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{z^2}{6}$ 收敛.

For cos z: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{4z^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-2} = \frac{4z^2}{\pi^2}\lambda(2) = \frac{z^2}{2}$

2.6 Asymptotic Series. 用处很大 QM→ WKB expansion.

考虑两种积分 $I_1(x)=\int_x^{\infty} e^{-u} f(u)\,du$.

$$I_2(x)=\int_0^{\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right)du$$

指数积分 渐进级数

$$Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^u}{u}du$$

$$-E(-x)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du = E_1(x)$$

它有级数展开的形式

$$E_1(x) = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\,n!}$$

参数积分

$$I(x,p)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^p}du$$

$$=\frac{e^{-x}}{x^p}-p\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^{p+1}}du = \frac{e^{-x}}{x^p}-\frac{pe^{-x}}{x^{p+1}}+p(p+1)\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^{p+2}}du$$

$$I(x,p) = e^{-x}\cancel{\left[\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \cdots + p(p+1)\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+2}}du\right]}$$

$$= e^{-x}\Big(\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(p+n-2)!}{(p-1)!\,x^{p+n-1}}$$

$$+ (-1)^n \frac{(p+n-1)}{(p-1)!}\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+n}}du$$

D'Alembert 判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{p+n}{x} = \infty$$

发散，直接看整个无价值，而是讨论部分和。

余项：$I(x,p) - S_n(x,p) = (-1)^{n+1}\frac{(p+n)!}{(p-1)!}\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}du = R_n(x,p)$

其绝对值为

$$|R_n(x,p)| \le \frac{(p+n)!}{(p-1)!}\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}du. \qquad u = v + x.$$

则积分变为 $\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}du = e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{(v+x)^{p+n+1}}dv$

$$= \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}}\int_0^\infty e^{-v}\left(1+\frac{v}{x}\right)^{-p-n-1}dv.$$

对 $x\to\infty$ ≈ 1

则 $|R_n(x,p)| \approx \frac{(p+n)!}{(p-1)!}\frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}}$

如果 x 足够大，部分和可以是原函数的一个很好的近似。

因此有时称为半收敛级数

比如对于 $E_1(x)$ 的近似级数为

$$e^x E_1(x) = e^x\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \approx S_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

其数值是近似的

$$0.1664 \le e^x E_1(x)\big|_{x=5} \le 0.1741$$

Cosine and Sine Integrals.

$$Ci(u) = -\int_u^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

$$si(u) = -\int_u^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

换元 e^{it}.

$$Ci(u) + Si(u) = -\int_u^{\infty} \frac{e^{-it}}{t} dt$$

$t \to z$

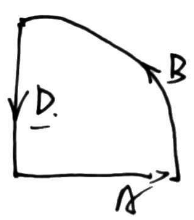
$$F(u) = Ci(u) + Si(u) = -e^{iu}\int_0^{\infty} \frac{e^{iz}dz}{u+z}$$ 广义

考虑围道积分 $-e^{iu}\oint \frac{e^{iz}dz}{u+z}$

我们想考虑 当$u \to \infty$时的情况 积分是如何的.

这个积分是单极点的在负实轴 都解析

所以围道积分0



$D = B + A$

D: $$F(u) = -e^{iu}\int_0^{\infty} \frac{e^{-y} i\, dy}{u+iy}$$

为了得到渐近级数:

$$\frac{1}{u+iy} = \frac{1}{u}\left[1 - \frac{iy}{u} + \left(\frac{iy}{u}\right)^2 - \dots\right]$$

同时利用:

$$\int_0^{\infty} y^n e^{-y} dy = n!$$

得到:

$$F(u) \simeq -\frac{ie^{iu}}{u}\left[1 - i\left(\frac{1!}{u}\right) - \left(\frac{2!}{u^2}\right) + i\left(\frac{3!}{u^3}\right) + \left(\frac{4!}{u^4}\right) - \dots\right]$$

$e^{iu} = \cos u + i \sin u$ 分成两部分

$$Ci(u) \simeq \frac{\sin u}{u}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{(2n)!}{u^{2n}} - \frac{\cos u}{u}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{u^{2n+1}}$$

$$si(u) \simeq -\frac{\cos u}{u}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{(2n)!}{u^{2n}} - \frac{\sin u}{u}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{u^{2n+1}}$$

Definition:

余项 · $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$

其中 $S_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots \frac{a_n}{x^n}$

$$x^n R_n(x) = x^n[f(x) - S_n(x)]$$

有性质

$\lim_{x\to\infty} x^n R_n(x) = 0$ n 恒定

$\lim_{n\to\infty} x^n R_n(x) = \infty$ x 恒定

S_n 认为是一个幂级数，$R_n(x) \sim x^{-n-1}$

那我们写出 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$.

只有在 $x\to\infty$ ~ 才会是=

Dispersion Relations. 色散问题

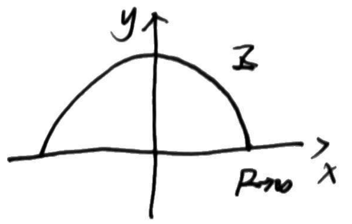
n. 有实部 相速度 克拉莫-克若尼关系式

有虚部 吸收.

实部 $\frac{1}{n^2-1}$ 可以用被虚数的一个积分代替

考虑复变函数. 在上半面解析 在实轴

要求在 $|z|\to\infty$ 时 $f(z)\to 0$



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z_0}dx$$

假设 z_0 在上半圆解析

证 则 $\oint \frac{f(x)}{x-z_0}dx=0$.

我们取实轴上的路径，且跳过任何实轴上的极点而经过上半圆，分为三部分，其中选取的半圆长度和 $|w|$ 成正比，只要 $f(x)$ 衰减的比 $\frac{1}{w}$ 快，对半圆部分的积分为0 只剩两部分

$$\oint \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int \frac{f(x)}{x-x_0}dx - \underbrace{\pi i f(x_0)}_{\text{留数定理}} = 0$$

则有 $f(x_0) = \frac{1}{\pi i}\int \frac{f(x)}{x-x_0}dx$

$$f(x_0) = u + iv(x_0)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{x-x_0}dx - \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-x_0}dx$$

则有实部分和虚部的积分关系

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x_0)}{x-x_0}dx$$

$$v(x_0) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x_0)}{x-x_0}dx$$

克拉莫-克若尼关系.