Bessel Functions.

3.1 第一类贝塞尔~~方程~~.函数.

贝塞尔方程:

$$x^2 J_\nu'' + x J_\nu' + (x^2-\nu^2) J_\nu = 0 \quad (\nu \geq 0)$$

求解: $x=0$ 是方程的正则奇点

应当代入. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$.

式左: $= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \nu^2$

$$= x^r \left\{ c_0 (r^2-\nu^2) + c_1 [(r+1)^2-\nu^2] x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+2)(k+r+1) c_{k+2} + (k+r+2) c_{k+2} + c_k - \nu^2 c_{k+2}] x^{k+2} \right\}$$

各项等于零, 可以得到三个等式

第一项: $r^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\nu$.

取 $r=\nu$ 代入有

$$\begin{cases} (2\nu+1) c_1 = 0 \\ (k+2)(k+2+2\nu) c_{k+2} + c_k = 0 \end{cases}$$

则得 $c_1 = 0$ 可得递推

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+2\nu+2)}$$ 由 $c_1 = 0$ 知 $c_{2n+1} = 0$

只剩偶数项: 令 $k+2 = 2n$.

有

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2^2 n (n+\nu)}$$

$$c_2 = \frac{-c_0}{2^2 \cdot 1 (1+\nu)}$$

$$\vdots$$

故

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (1+\nu)(\cdots)(n+\nu)} c_0$$

特解:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \nu!}{2^{2n} n! (n+\nu)!} x^{2n+\nu}$$

为简化 $K_2 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}$

$y_1(x) = K_2 y$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

常用 $J_\nu(x)$ 表示

对于 $r=-\nu$ 得

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

$J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 被称为"第一类贝塞尔函数"

生成函数.

$$g(x,t)=e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n.$$

利用生成函数会得到关系,

1) $J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$

2) $J_m(-x)=(-1)^m J_m(x)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial t}=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}nJ_n t^{n-1}\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial x}=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}J_n'(x)t^n.\end{cases}$$

3) 4) $\Rightarrow\begin{cases}J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\dfrac{2n}{x}J_n(x)\\[2ex]J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)\end{cases}$ 递推关系

5) 初始：

$$J_m(0)=\begin{cases}0 & m>0\\ 1 & m=0\end{cases}$$

6) $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)]=x^n J_{n-1}(x)$

7) $\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$

积分形式

给出生成函数

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})}$$

有积分关系.

$$\oint_c \frac{g(x,t)}{t^{n+1}}dt = \oint_c \sum J_n(x)\, t^{n-n-1} dt = 2\pi i J_n(x)$$

其中c是环绕t=0奇点的封闭曲线

我们做个替换 $t=e^{i\theta}$, $dt = ie^{i\theta}d\theta$

$$g(x,t) = e^{ix\sin\theta}$$

$$\Rightarrow 2\pi i J_n(x) = \int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)}\, i\, d\theta.$$ 另令实虚部相等

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta$$

特例: $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta$

Example: 1

波长λ

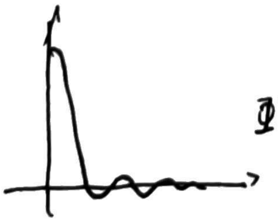
$$\Phi = A\int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} e^{ibr\cos\theta}d\theta$$

其中 $b = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha$.

$$\Phi \sim 2\pi\int_0^a J_0(br)\, r\,dr.$$

利用微分推递关系得.

$$\Phi \sim 2\pi\int_0^a b^2\frac{d}{dr}[(br)J_1(br)]dr = \frac{2\pi a}{b}J_1(ab)$$



$$\Phi^2 \sim \left(\frac{J_1[\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\alpha]}{\sin\alpha}\right)^2$$

贝塞尔非整数解

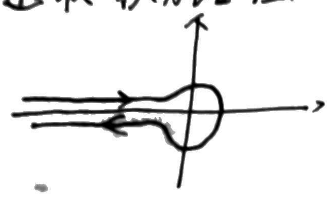
无法利用生成函数得到，利用积分关系可以。

Schlaefli Integral

利用积分：

$$\oint_C \frac{e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})}}{t^{n+1}}dt = 2\pi i J_n(x).$$

选取积分路径.



开放的积分路径.

且在 $t=0$ 有一个支点.

显然 $F_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{t^{\nu+1}}dt$ 此时是满足 Bessel 方程的

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d}{dt}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{t^\nu}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right\}dt$$

$$= \left\{\frac{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{t^\nu}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right\}_{end} - \left\{\quad\right\}_{start}.$$

在 $t\to-\infty$，$x\to\infty$ 时成立

即 $F_\nu(x)$ 符合 Bessel ODE 的解

但在 x 不是足够大时，

$$F_\nu(x) \sim \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu e^{i\nu\pi}\int_{C'} \frac{e^{-u}}{u^{\nu+1}}du$$

利用 Gamma 函数的结论

$$\int_C e^{-t}t^\nu dt = 2i\, e^{i\nu\pi}\,\Gamma(\nu+1)\sin(\nu\pi).$$

得

$$F_\nu \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\sin[(\nu+1)\pi]\,\Gamma(-\nu)}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu.$$

$$J_{-\nu}=\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \qquad J_{\nu}' \longrightarrow \frac{-\nu}{2\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1}$$

代入其中

$$J_{\nu}'(x)J_{-\nu}(x)-J_{\nu}(x)J_{-\nu}'(x)=\frac{-2\nu}{x\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)}=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}$$

那么 $A_\nu=-\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi$，然后利用递推公式：

$$J_\nu J_{-\nu+1}+J_{-\nu}J_{\nu-1}=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}, \quad J_\nu J_{-\nu-1}+J_{-\nu}J_{\nu+1}=\frac{-2\sin\nu\pi}{\pi x}$$

根据第二类贝塞尔函数的定义代入.

$$J_\nu Y_\nu'-J_\nu' Y_\nu=\frac{2}{\pi x}$$

$$J_\nu Y_{\nu+1}-J_{\nu+1}Y_\nu=-\frac{2}{\pi x}.$$

3.3. 汉克尔函数：

汉克尔函数是具有渐近特性的Bessel ODE的解.

在涉及球形或圆柱波传播的问题中特别有用.

很显然，$J_\nu(x)$ 和 $Y_\nu(x)$ 已然完整表示出 Bessel ODE的解.

则 $H_\nu(x)$ 必由前者线性表示..

定义：

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x).$$

对于实参数，它们是复共轭的.

其的级数展开形式：

$$H_0^{(1)}(x)\simeq i\frac{2}{\pi}\ln x+1+i\frac{2}{\pi}(\gamma-\ln 2)+\cdots$$

$$H_\nu^{(1)}(x)\simeq -i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu+\cdots \quad \nu>0$$

$$H_0^{(2)}(x)\simeq -i\frac{2}{\pi}\ln x+1-i\frac{2}{\pi}(\gamma-\ln 2)+\cdots$$

$$H_\nu^{(2)}(x)\simeq i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu+\cdots \quad \nu>0$$

其中 γ 是 Euler 常数.

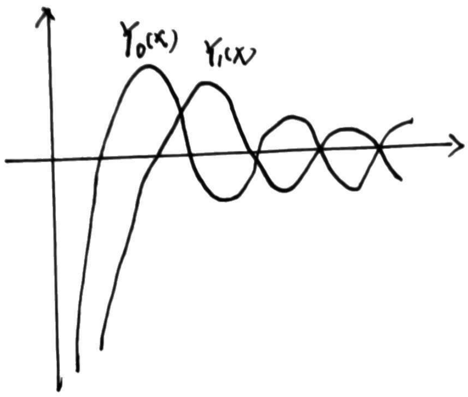
特殊的

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k!}[-\gamma+H_k]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$=\frac{2}{\pi}J_0(x)\left[\gamma+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k!}H_k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

其中 H_k 称为调和数.(Harmonic number) $\sum_{m=1}^{k} m^{-1}$

γ 是 Euler 常数.



积分表示.: $Y_0(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(x\cosh t)dt=-\frac{2}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\cos(xt)}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}}dt \quad x>0$

递推关系: $\rightarrow$ $J_n(x)$.

Wronskian. Formulas:

给出一个 ODE

$$p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$$

对于自共轭的情况 $(q=p')$ 有.其解满足:

$$u(x)v'(x)-u'(x)v(x)=\frac{A}{p(x)} \quad : \text{Wrorskian Formular}$$

为了 ~~使~~ 利 Bessel 方程.到自共形式, 应.该写成: $xy''+y'+(x-\frac{\nu^2}{x})y=0$.

即 $p(x)=x$. , 那么. 利用 Wroskian Formular:

$$J_\nu J_{-\nu}'-J_\nu' J_{-\nu}=\frac{A_\nu}{x}$$

A_ν 是个依赖于 ν 的常数.

根据之前的结论当 $x\rightarrow$ small

$$J_\nu\rightarrow\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \qquad J_\nu'\rightarrow\frac{\nu}{2\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}$$

3.2 诺伊曼函数

我们知道 ν 阶贝塞尔方程的通解是

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)$$

我们有时取 $C_1=\cot\nu\pi$ $C_2=-\csc\nu\pi$ 代入得到一个特解，以此作为 ν 阶贝塞尔方程第二个线性独立的解 叫作 ν 阶 诺伊曼函数，即

$$Y_\nu(x)=N_\nu(x)=\frac{J_\nu\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

也称为"第二类贝塞尔函数"，因此通解可以写为

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x)$$

$N_\nu(x)$ 与 $J_\nu(x)$ 是线性无关的，ν 是非整数显然满足

而对于整数，有

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x)$$

有 Gamma 函数关系　　写成幂级数关系

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin z\pi}$$

$$N_\nu(x)=-\frac{1}{\sin z\pi}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}-\dots\right]$$

$$=-\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}+\dots$$

我们利用洛必达

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{dJ_{-\nu}}{d\nu}\right]_{\nu=n}$$

我们利用这个关系得到

$$N_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left[\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

即然汉克尔函数是 $J_\nu(x)$ 和 $Y_\nu(x)$ 的线性叠加

仍有递推公式：

$$H_{\nu-1}(x)+H_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}H_\nu(x)$$

$$H_{\nu-1}(x)-H_{\nu+1}(x)=2H_\nu'(x)$$

也满足 Wronskian formulas：

$$H^{(2)}_\nu(x)H^{(1)}_{\nu+1}(x)-H^{(1)}_\nu H^{(2)}_{\nu+1}=\frac{4}{i\pi x}$$

$$J_{\nu-1}H^{(1)}_\nu-J_\nu H^{(1)}_{\nu-1}=\frac{2}{i\pi x}$$

$$J_{\nu-1}H^{(2)}_\nu-J_\nu H^{(2)}_{\nu-1}=-\frac{2}{i\pi x}$$

围道积分表示：

我们知道第一类贝塞尔函数的积分表示方法也就是

Schlaefli Integral

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{(x/2)(t-\frac{1}{t})}\frac{dt}{t^{\nu+1}}$$

~~而对于汉克尔函数~~ 当 ν 是非整数，积分在 $t=0$ 有一支点，则积分时要避免负实轴的割线

为了拓展到广义的 ν，我们要说明

$$\frac{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{t^\nu}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]$$

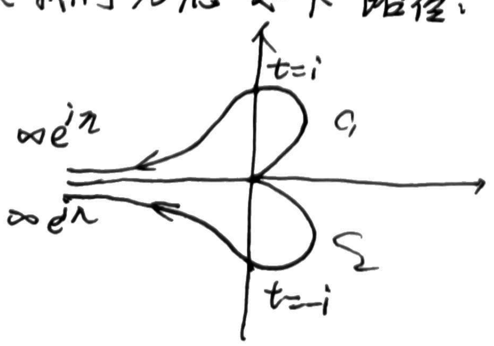
都满足 Bessel ODE

对于任一开曲线都在曲线的两个端点为0

而我们进一步说明，不仅在割线的上方和下方的实轴 $t=-\infty$ 处会为0

而且当从正 t 接近 $t=0$ 时也会为零

所以我们考虑如下路径：



分有两个路径，对于

$$H^{(1)}_{\nu}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_1} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}\frac{dt}{t^{\nu+1}}$$

$$H^{(2)}_{\nu}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_2} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}\frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

从积分表达式中得到

$$J_{\nu}(x)=\frac{1}{2}[H^{(1)}_{\nu}(x)+H^{(2)}_{\nu}(x)]$$

$$Y_{\nu}(x)=\frac{1}{2i}[H^{(1)}_{\nu}(x)-H^{(2)}_{\nu}(x)]$$

3.4. 修正贝塞尔函数

修正贝塞尔方程：

$$\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}P_{\nu}(k\rho)+\rho\frac{d}{d\rho}P_{\nu}(k\rho)-(k^2\rho^2+\nu^2)P_{\nu}(k\rho)=0.$$

有别于之前

研究圆柱状区域的拉普拉斯方程定解问题，都是柱侧面有齐次边界条件的、

但如果是上下底面具有齐次边界条件，这时$Z(z)$的齐次方程 $Z''+h^2Z=0$ 跟上下边界条件构成本征值问题，其中$h^2=-\mu\geq 0$，即应考虑 $\mu<0$ 的分离变数的解。

当$\mu<0$时，即有之前的方程。

解为 其中一个实数解为

$$I_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

虚宗量贝塞尔函数

且 m 整数，$I_{-m}(x)=I_m(x)$ 并非独立的另一解

我们要寻找线性独立的另一解：

$$H_\nu^{(1)}(ix) = J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)$$

$$H_\nu^{(1)}(ix) = J_\nu(ix) + i\,\frac{J_\nu(ix)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(ix)}{\sin\nu\pi}$$

$$= \frac{e^{-i\nu\pi}J_\nu(ix) - J_{-\nu}(ix)}{-i\sin\nu\pi}$$

且 $H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{e^{-i\frac{\nu}{2}\pi}}{-i}\,\frac{I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$

乘以 $\frac{\pi}{2}ie^{i\nu\pi/2}$ 使成为实值函数，记作 $K_\nu(x)$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\pi}{2}\nu}H_\nu^{(1)}(ix)$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

↑ 就是虚宗量汉克尔函数． 这两个便是线性独立的特解．

递推式：

J： $J_{\nu-1}(ix) + J_{\nu+1}(ix) = \frac{2n}{ix}J_n(ix)$

$J \to I$． $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$．

则：

$$i^{\nu-1}I_{\nu-1}(x) + i^{\nu+1}I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{ix}i^\nu I_\nu(x)$$

$$\Rightarrow \quad I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}I_\nu(x)$$

$$\Rightarrow \quad I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x)$$

K： $K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x}K_\nu(x)$

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_\nu(x)$$

积分形式：

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cosh(x\cos x)\,d\theta$$

$$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x\sinh t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)\,dt}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad x>0.$$

3.5 球贝塞尔函数

用球坐标系对亥姆霍兹方程进行分离变数，得到球贝塞尔方程

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0$$

若将 $x=kr$，$R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,y(x)$ 原方程化为 $l+\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+[x^2-(l+\tfrac{1}{2})^2]y=0$$

线性独立解

对于 $l+\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔方程有如下几种解

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x),\ J_{-(l+\frac{1}{2})}(x),\ N_{l+\frac{1}{2}}(x),\ H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x),\ H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

任取两个就构成线独立解

则有：球贝塞尔函数：$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$

$$j_{-l}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-l+\frac{1}{2}}(x)$$

球诺依曼函数：$n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x)$

球汉克尔函数：$h^{(1)}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$

$$h^{(2)}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

递推公式

$$z_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Z_{l+\frac{1}{2}}(x)\qquad \text{任意球函数}$$

$$Z_{l+\frac{3}{2}}(x)+Z_{l-\frac{1}{2}}(x)=\frac{2l+1}{x}Z_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

用 z 表示

$$z_{l-1}(x)+z_{l+1}(x)=\frac{(2l+1)}{x}z_l(x)\qquad \square$$

之前的递推

$$\frac{d}{dx}[z_l(x)/x^l]=-z_{l+1}(x)/x^l$$

$$\frac{d}{dx}[x^{l+1}z_l(x)]=x^{l+1}z_{l-1}(x)$$

$$Z_l'(x) - \frac{l Z_l(x)}{x} = -Z_{l+1}(x)$$

$$Z_l'(x) + \frac{(l+1) Z_l(x)}{x} = Z_{l-1}(x)$$

$$Z_{l-1}(x) - Z_{l+1}(x) = 2Z_l'(x) + \frac{Z_l(x)}{x}$$

将以上式代入↑

$$Z_l'(x) = [l Z_{l-1}(x) - (l+1) Z_{l+1}(x)]/(2l+1)$$

根限值.

当 $x \to 0$ 时

$$j_n(x) \simeq \frac{x^n}{(2n+1)!!}$$

$$y_n(x) \simeq -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}$$

级数：

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(l+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}+2k}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(l+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}+2k} x^{l+2k}$$

可见 $j_0(0)=1$ $j_l(0)=0$.

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} j_{-(l+1)}(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-l+k+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{-l-\frac{1}{2}+2k} x^{-l+2k-1}$$

当 $x \to 0$ $n_l(x) \to \infty$

引入渐近公式

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l+1}{2}\pi\right)$$

$$n_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l+1}{2}\pi\right)$$

$$h_l^{(1)}(x) \sim \frac{1}{x} e^{ix} (-i)^{l+1}$$

$$h_l(x) \sim \frac{1}{x} e^{-ix} i^{l+1}$$

虚宗量 球贝塞尔函数.

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - [k^2r^2 + l(l+1)]R = 0.$$

对应的虚宗量函数

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, I_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, K_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

递推式:

$$i_{n-1}(x) - i_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} i_n(x)$$

$$n\, i_{n-1}(x) + (n+1)\, i_{n+1}(x) = (2n+1)\, i_n'(x)$$

$$k_{n-1}(x) - k_{n+1}(x) = -\frac{2n+1}{x} k_n(x)$$

$$n\, k_{n-1}(x) + (n+1)\, k_{n+1}(x) = -(2n+1)\, k_n'(x).$$

$$i_0 = \frac{\sinh x}{x} \qquad k_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$i_1 = \frac{\cosh x}{x} - \frac{\sinh x}{x^2} \qquad k_1 = e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

For small x

$$i_n(x) \approx \frac{x^n}{(2n+1)!!} \qquad k_n(x) \approx \frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}$$

For lange x:

$$i_n(x) \sim \frac{e^x}{2x}, \quad k_n(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}$$