Legendre Functions.

对 Laplace 方程和亥姆霍兹方程进行分离变数，得到球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0.$$

$Y(\theta,\varphi)$ 称为球函数，对球函数进行分离变数

$$Y(\theta,\varphi)=(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)\,\Theta(\theta)$$

↑ 从连带勒让德方程解

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0.$$

其中 $x=\cos\theta$

1. 勒让德多项式

我们研究 $m=0$ 情况

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0.$$

$$\Rightarrow y''-\left[\frac{2x}{1-x^2}\right]y'+\left[\frac{l(l+1)}{1-x^2}\right]y=0$$

$$p(x)=-\frac{2x}{1-x^2}\qquad q(x)=\frac{l(l+1)}{1-x^2}.$$

在 $x_0=0$ 处，$p(x_0)=0$，$q(x_0)=l(l+1)$，均为有限值，则它们在 $x_0=0$ 处解析的

因此 $x_0=0$ 是方程的常点，因此解应有泰勒级数的形式

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

代入勒让德方程，Constant, x, x^2 ... 每一项系数都应为 0.

可以得到一般式

$$a_{k+2}=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

一阶一阶的推得：

$$a_{l-2n}=(-1)^n\frac{(2l-2n)!}{n!\,2^l(l-n)!\,(l-2n)!}$$

得到具体表达式为 取整.

$$P_l(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{l}{2}]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!\,(l-k)!\,(l-2k)!}x^{l-2k}$$

前几个勒让德多项式：

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x = \cos\theta$

$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

$P_4(x) = \frac{1}{64}(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9)$

⋮

我们来计算 $P_l(0)$　首先 $l = 2n+1$　$P_{2n+1}(0) = 0$

$l = 2n$ 时

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! \, 2^n n!}$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{[(2n)!!]^2}$$

$$= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

1) 勒让德微分形式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l$$

也称 罗德里格斯公式

证：用二项式把 $(x^2-1)^l$ 展开

$$\frac{1}{2^l l!}(x^2-1)^l = \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{(l-k)!k!} (x^2)^{l-k} (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \frac{1}{2^l k!(l-k)!} x^{2l-2k}$$

求 l 次，我们只需要保留幂次 $2l-2k \geq l$ 项，即 $k \leq \frac{l}{2}$ 的项，

即 $\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l = P_l(x)$

2) 积分表示

利用柯西积分的导数公式，微分表示可表为围道积分

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz.$$

这是勒让德多项式的 Schlaefli 积分

↑ 也可进一步表示为定积分，取 C 为圆周，圆心在 $z=x$，半径为 $\sqrt{|x^2-1|}$

在 C 上 $z-x=\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}$，$dz=i\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}d\psi$

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[(x+\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi})^2-1]^l}{(\sqrt{x^2-1})^{l+1}(e^{i\psi})^{l+1}}\cdot[i\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}]d\psi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}+(x^2-1)e^{i2\psi}-1}{2\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}}\right]^l d\psi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x+\sqrt{x^2-1}\,\tfrac{1}{2}(e^{-i\psi}+e^{i\psi})]^l d\psi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x+i\sqrt{1-x^2}\cos\psi]^l d\psi$$

称为拉普拉斯积分

生成函数：

$$g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n.$$

2、正交性

Legendre ODE 是自共轭的，$P'(x)$ 的系数 $(1-x^2)$ 在 $x=\pm1$ 为 0.

则对于不同的 n 自然在以单位权重函数下是正交

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0\quad(n\neq m)$$

$x=\cos\theta \Rightarrow$

$$\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\,d\cos\theta=0\quad(n\neq m)$$

P_n 的定义并不能保证它们被规范化。而建立归一化的方法是生成函数公式平方，得

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n\right]^2$$

从 $[-1,1]$ 积分，则交叉项消失

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx$$

令 $y=1-2tx+t^2$ $\quad dy=-2tdx$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2tx+t^2}=\frac{1}{2t}\int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2}\frac{dy}{y}=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

级数展开：

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}$$

幂次对应系数相等

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}$$

结正交性的积分有

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2\delta_{nm}}{2n+1}$$

勒让德级数

由于勒让德多项式的正交性，我们可以将其作为一组基来表示 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上定义：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)$$

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$$

且正交性保证了其展开是唯一的

其的一个应用就是得 Laplace 方程的解

球坐标形式：

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}(A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-l-1})P_l^m(\cos\theta)(A_{lm}'\sin m\varphi+B_{lm}'\cos m\varphi)$$

其中l是整数，我们考虑与φ无关的解

$$\psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(a_l r^l+b_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

往往我们的问题是限制在一定区域之内 or 之外

则
$$\psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^l P_l(\cos\theta) \quad (r\le r_0)$$

$$\psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta)$$

3、生成函数与物理情景

如果我们在z正轴放置一个q电荷，用极坐标写出来电势

$$\psi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}$$

其实它出现了生成函数，我们改写一下

$$\psi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}$$

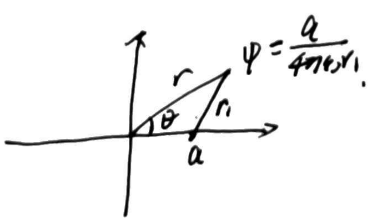
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}g\left(\cos\theta,\frac{a}{r}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

若$r<a$，我们再写出来

$$\psi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{2r}{a}\cos\theta+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^n \quad (r<a)$$



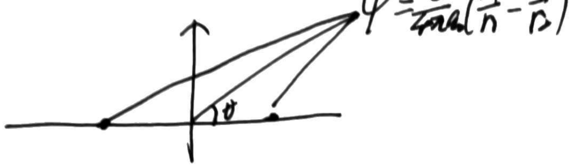
对于$\frac{1}{|r_1-r_2|}$的展开

$$\frac{1}{|r_1-r_2|}=\frac{1}{r_>}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n P_n(\cos\chi)$$

$r_<$是较小的，$r_>$是较大的　χ是r_1,r_2夹角

电多极矩　偶极矩

$\psi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.



$$\psi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(-\frac{a}{r}\right)^n\right]$$

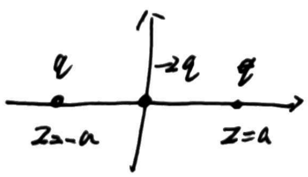
整理

$$\psi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{a}{r}P_1(\cos\theta) + \frac{a^3}{r^3}P_3(\cos\theta) + \cdots\right]$$

$a \to 0$ 小量近似.

$$\psi = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} \qquad \mu = 2qa.$$

考虑:四极子的展开



即两个偶极子的叠加.

$$\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_i q_i + \sum_i \frac{q_i a_i}{r}P_1(\cos\theta) + \sum_i \frac{a_i^2 q_i}{r^2}P_2(\cos\theta) + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\mu_0 + \frac{\mu_1}{r}P_1(\cos\theta) + \frac{\mu_2}{r^2}P_2(\cos\theta) + \cdots\right]$$

μ_i 称为多偶极矩

4. 连带勒让德方程 & 函数

连带勒让德方程

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x) = 0$$

$x_0=0$ 是连带勒让德方程的常点，我们可以利 $x_0=0$ 的邻域上求连带勒让德方程的级数解，但实操作比较复杂，我们一般作变换

$$P = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} y(x)$$

$$P' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} y' - mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} y$$

$$P'' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} y'' - 2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} y' + \left[-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} + (m^2-2m)x^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}\right] y$$

代入连带勒让德方程：

$$(1-x^2)y'' - 2x(m+1)y' + [\lambda - m(m+1)]y = 0 \qquad \square$$

代入级数解：$y = \sum_j a_j x^{k+j}$

会 $k=0$，$k=1$ 两个解：先 $k=0$

$$a_{j+2} = a_j\left[\frac{j^2+(2m+1)j - \lambda + m(m+1)}{(j+1)(j+2)}\right]$$

这未免有些复杂，我们可以选择更简单的方法

In fact，□方程就是勒让德方程逐项求导m次的方程

则 $y(x) = P^{(m)}(x)$

即知 $P = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{[m]}(x)$ 即为连带勒让德方程，通常记为 $P_l^m(x)$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{[m]}(x)$$

且 $P_l^0(x) = P_l(x)$.

$$P_1^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sin\theta$$

$$P_2^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(3x)=\frac{3}{2}\sin 2\theta$$

$$P_2^2(x)=3(1-x^2)=3\sin^2\theta=\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$\vdots$

微分表示、

罗德里格斯公式

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

于是不难看出，$l-m=2n$时，$P_l^m(x)$为偶函数

$l-m=2n+1$时，$P_l^m(x)$为奇函数.

当$m\to -m$

$$P_l^{-m}(x)=\frac{(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l$$

上两式相除，

$$\text{Constant}=\frac{P_l^m(x)}{P_l^{-m}(x)}=\frac{(1-x^2)^m d^{l+m}(x^2-1)/dx^{l+m}}{d^{l-m}(x^2-1)^l/dx^{l-m}}$$

上式右边是有理分式，分子与分母的同幂项之比就应当等于左边那个常数，我们只看最高幂项之比，它是

$$(-1)^m x^{2m}\frac{(2l)!}{(l-m)!}x^{l-m} : \frac{(2l)!}{(l+m)!}x^{l+m}=(-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

我们得到

$$\begin{cases} P_l^m(x)=(-1)^m\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}P_l^{-m}(x) \\ P_l^{-m}(x)=(-1)^m\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x). \end{cases}$$

积分表示：

Schloefli Integral

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l}\frac{1}{2\pi i}\frac{(l+m)!}{l!}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}}dz$$

此积分可进一步表示为定积分　圆心 $z=x$　$r=\sqrt{x^2-1}$

$$P_l^m(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\oint_c\left(i\frac{z-x}{e^{i\varphi}}\right)^m\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}}dz$$

$$=\frac{i^m}{2\pi i}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\oint_c e^{-im\varphi}\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz$$

$$=\frac{i^m}{2\pi i}\cdot\frac{(l+m)!}{2^l l!}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\varphi}\frac{[(x+\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi})^2-1]^l}{[\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi}]^{l+1}}\,i\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\varphi}\left[\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi}+(x^2-1)e^{i2\varphi}-1}{2\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi}}\right]^l d\varphi$$

$$=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\varphi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\,\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\right]^l d\varphi$$

以 x 回变到原来 θ，$x=\cos\theta$，则

$$P_l^m(x)=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\varphi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi]^l d\varphi$$

其也被称为拉普拉斯积分

正交关系：

同一 m 而不同阶 l 的连带勒让德函数在区间 $(-1,+1)$ 正交

Δ $\int_{-1}^{+1}P_k^m(x)P_l^m(x)dx=0\quad(k\neq l)$

$$\int_{-1}^{+1}P_p^m(x)P_q^m(x)\,dx=\frac{(-1)^m}{2^{p+q}p!q!}\int_{-1}^{1}R^m\left(\frac{d^{p+m}R^p}{dx^{p+m}}\right)\left(\frac{d^{q+m}R^q}{dx^{q+m}}\right)dx$$

若 $p<q$.

$$u=R^m\left(\frac{d^{p+m}R^p}{dx^{p+m}}\right)\qquad dv=\left(\frac{d^{q+m}R^q}{dx^{q+m}}\right)dx$$

对于 $p+m+1\leq q+m$　积分全为0

$$\frac{d^{p+m+1}}{dx^{p+m+1}}u=\frac{d^{p+m+1}}{dx^{p+m+1}}\left[R^m\left(\frac{d^{p+m}R^p}{dx^{p+m}}\right)\right]$$

$$\frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}}\left[R^m\left[\frac{d^{p+m}R^p}{dx^{p+m}}\right]\right]=\binom{p+m}{2m}\left(\frac{d^{2m}R^m}{dx^{2m}}\right)\left(\frac{d^{2p}R^p}{dx^{2p}}\right)=\frac{(p+m)!}{(p-m)!}(2p)!$$

$$\int_{-1}^{1}[P_p^m(x)]^2dx=\frac{(-1)^{2m+p}}{2^{2p}p!p!}\frac{(p+m)!}{(p-m)!}(2p)!\int_{-1}^{1}R^p dx$$

beta fuction.

$$\int_{-1}^{1}R^p dx=(-1)^p\frac{2(2p)!!}{(2p+1)!!}=(-1)^p\frac{2^{2p+1}p!p!}{(2p+1)!}$$

我们最后得到

$$\int_{-1}^{1}P_p^m(x)P_q^m(x)dx=\frac{2}{2p+1}\frac{(p+m)!}{(p-m)!}\delta_{pq}$$

5、球谐函数.

球方程：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0$$

解为球函数

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\quad\left(\begin{matrix}m=0,1,2,\dots l\\ l=0,1,2,3\dots\end{matrix}\right)$$

表示是线性独立的，可任其一也可组合.

l 称为球函数的阶.

复数形式

线性独立的 l 阶球函数 $2l+1$ 个

$m=0\rightarrow P_l(\cos\theta)$

$m=1$ → $\sin m\varphi\, P_l^m$, $\cos m\varphi\, P_l^m$

我们根据欧拉公式可以重新组合为

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}\quad\begin{cases}m=-l,-l+1\dots0,\dots l\\ l=0,1,\dots\end{cases}$$

其也是正交的

$$\iint_S Y_l^m(\theta,\varphi)\,Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$=\int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)\,P_k^n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}d\varphi$$

$$=\int_{-1}^{+1} P_l^m(x)\,P_k^n(x)\,dx\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}d\varphi$$

$$=0 \quad (m\neq n \text{ or } l\neq k).$$

完整解:

我们有通用的方程:

$$R''+\frac{2}{r}R'+[f(r)-l(l+1)]R=0$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\varphi^2}+l(l+1)\right]Y_l^m(\theta,\varphi)=0.$$

其解可以写为

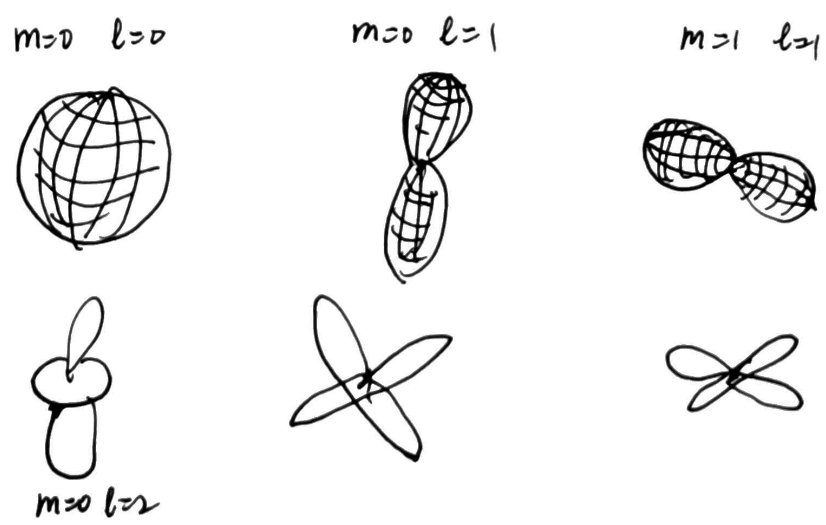
$$\psi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm}r^{l}+b_{lm}r^{-l-1}\right)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^1(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{(x+iy)}{r}$$

$\vdots$

Figure:



球谐的部分重要性在于完备性，这

这也意味着在球面计算的任何函数 $f(\theta,\varphi)$ 都可以在均匀收敛的双级球谐中展开

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$c_{lm}=\langle Y_l^m | f(\theta,\varphi)\rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y_l^m(\theta,\varphi)^* f(\theta,\varphi).$$

6. 第二类勒让德函数.

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'-\frac{l(l+1)}{1-x^2}y=0.$$

给出：

$$Q_l(x)=P_l(x)\int^x \frac{\exp\left[\int^x 2x/(1-x^2)dx\right]}{[P_l(x)]^2}dx$$

$$=P_l(x)\int^x \frac{dx}{(1-x^2)[P_l(x)]^2}$$

代表的

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$Q_1(x)=\frac{1}{2}P_1(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-1$$

将积分式变为求和得

$$Q_l(x)=\frac{1}{2}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} x^{l-1-2k}\cdot\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{2k-2n+1}\cdot\frac{(2l-2n)!}{n!(l-n)!(l-2n)!}\quad (l\geq 1)$$