Pertubation Theory and S-matrix

对于非相对论下一个粒子被某些粒子的散射是通过势能 $V(x)$. 由于散射振幅的表达式无法被精确计算, 故采用微扰方法. 这个方法在 $\int V(x,t)\,dt$ 比ħ小时成立. 故可以写:

$$\exp\left[\frac{-i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} V(x,t)\,dt\right] = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} V(x,t)\,dt - \frac{1}{2!\hbar^2}\left[\int_{t_i}^{t_f} V(x,t)\,dt\right]^2 + \cdots$$

此即微扰展开, 该形式代入

$$\langle q_f t_f | q_i t_i\rangle = N\int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} L(q,\dot{q})\,dt\right]$$

$$(\langle q_f t_f | q_i t_i\rangle = K(q_f t_f; q_i t_i))$$

得到一个级数

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \cdots,$$

第一项为

$$K_0 = N\int\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)\right]\mathcal{D}x$$
$$= N\int\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int \frac{1}{2}m\dot{x}^2\,dt\right)\right]\mathcal{D}x$$

写成分立的形式:

$$K_0 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{(n+1)/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n} dx_j \exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=0}^{n}(x_{j+1}-x_j)^2\right]$$

$$\text{integral} = \frac{1}{(n+1)^{1/2}}\left(\frac{i\hbar\tau}{m}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{im}{2\hbar(n+1)\tau}(x_f - x_i)^2\right]$$

故 $(n+1)\tau = t_f - t_i$, 故我们有了自由粒子传播子

$$K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \left(\frac{m}{i\hbar(t_f - t_i)}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{im(x_f - x_i)}{2\hbar(t_f - t_i)}\right] \quad (t_f > t_i)$$

条件 $t_f > t_i$ 对于传播子来说, 因为若 $t_f < t_i$, K_0 会消失

$$K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \theta(t_f - t_i)\left(\frac{m}{i\hbar(t_f - t_i)}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}\right]$$

现在计算 K_1，

$$K_1=-\frac{i}{\hbar}\lim_{n\to\infty} N^{(n+1)/2}\sum_{i=1}^{n}\tau\int \exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=0}^{n}(x_{j+1}-x_j)^2\right]V(x_i,t_i)\,dx_1\cdots dx_n$$

其中 $N=\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}$，并把对 t 的积分分立化。注意到 V 是 x 的函数，现在把求和分成两段，一部分 $j=0$ 到 $j=i-1$，另一部分 $j=i$ 到 $j=n$，同时也分开 x_i 的积分，并得到

$$K_1=\lim_{n\to\infty}\frac{-i}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}\tau\int dx_i\left[N^{(n-i+1)/2}\int\exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=i}^{n}(x_{j+1}-x_j)^2\right]dx_{i+1}\cdots dx_n\right]$$

$$\times V(x_i,t_i)\left[N^{i/2}\int\exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=0}^{i-1}(x_{j+1}-x_j)^2\right]dx_1\cdots dx_{i-1}\right]$$

这两个方大括号中的恰是 $K_0(x_ft_f;xt)$ 和 $K_0(xt;x_it_i)$，故换成 $\int dx\,dt$。上式变为

$$K_1(x_ft_f;x_it_i)=-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt\int_{-\infty}^{+\infty}K_0(x_ft_f;xt)V(x,t)K_0(xt;x_it_i)\,dx$$

现在若 $t>t_f$ 那么 $K_0(x_ft_f;xt)$ 消失，$t<t_i$ 那么 $K_0(xt;x_0t_0)$，t可全空间积分

$$K_1(x_ft_f;x_it_i)=\frac{-i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int K_0(x_ft_f;xt)V(x,t)K_0(xt;x_it_i)\,dx$$

通过相似的方法，二阶可写成

$$K_2(x_ft_f;x_it_i)=\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1\int_{-\infty}^{+\infty}dt_2\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\,K_0(x_ft_f;x_2t_2)V(x_2t_2)$$

$$\times K_0(x_2t_2;x_1t_1)V(x_1,t_1)K_0(x_1t_1;x_it_i)$$

相似的方式可用在 K_n 上，故可写成

$$K(x_f t_f; x_i t_i) = K_0(x_f t_f; x_i t_i) - \frac{i}{\hbar}\int K_0(x_f t_f; x_1 t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1 t_1; x_i t_i)\, dx_1 dt_1$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\int K_0(x_f t_f; x_1 t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1 t_1; x_2 t_2) V(x_2, t_2) \times K_0(x_2 t_2; x_i t_i)\, dx_1 dx_2 dt_1 dt_2$$

$$+ \cdots$$

这个序列叫玻恩序列

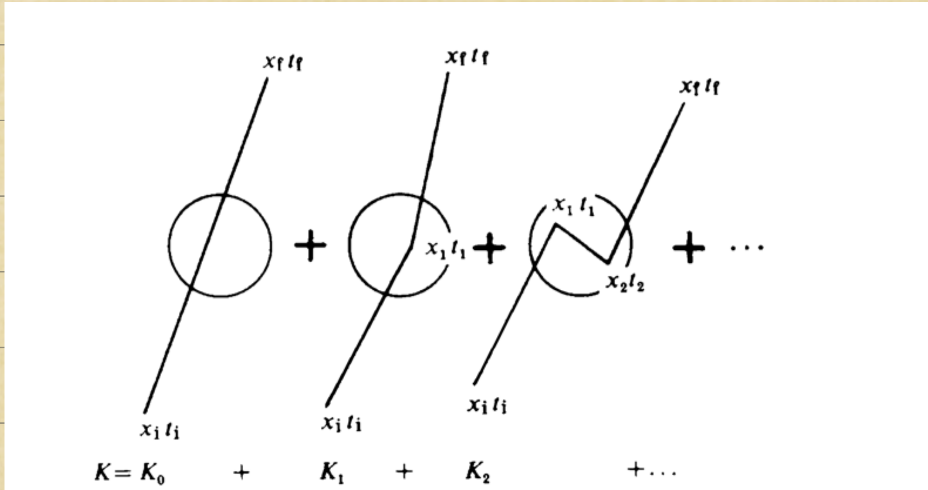


Fig. 5.5. The Born series.

注意到上式不包含 $\frac{1}{2!}$，原因如下：两次对于V的反应在不同时间发生，但不可分辨，故有

$$\frac{1}{2!}\int V(t')V(t'')\,dt'dt'' = \frac{1}{2!}\int [\theta(t'-t'')V(t')V(t'') + \theta(t''-t')V(t')V(t'')]$$

$$= \int \theta(t_1-t_2)V(t_1)V(t_2)\,dt_1 dt_2$$

同样，$\frac{1}{n!}$ 这个系数也没有在 K_n 中出现，我们现在说明 K_0 是 Schrödinger Eq 的格林函数

$$\psi(\vec{x}_f, t_f) = \int K(\vec{x}_f t_f; \vec{x}_i t_i)\,\psi(\vec{x}_i, t_i)\, d\vec{x}_i$$

$$= \int K_0(\vec{x}_f t_f; \vec{x}_i t_i)\psi(\vec{x}_i t_i)\, d\vec{x}_i$$

$$- \frac{i}{\hbar}\int K_0(\vec{x}_f t_f; \vec{x}\, t) V(\vec{x}, t) K_0(\vec{x}, t; \vec{x}_i t_i)\psi(\vec{x}_i, t_i)\, dt\, d\vec{x}\, d\vec{x}_i$$

$$+ \cdots$$

这里从一维扩展到了三维。设上述级数收敛，没有写的项是来修改最后一项K_0到全部的K，故

$$\psi(\vec{x}_f,t_f)=\int K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}_i t_i)\psi(\vec{x}_i t_i)d\vec{x}_i$$
$$-\frac{i}{\hbar}\int K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x} t)V(\vec{x},t)\psi(\vec{x} t)d\vec{x}dt$$

设 $t_i\to-\infty$ 时，ψ 成为平面波ϕ。然后上式变成了

$$\psi(\vec{x}_f t_f)=\phi(\vec{x}_f t_f)-\frac{i}{\hbar}\int K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}t)V(\vec{x},t)\psi(\vec{x}t)\,d\vec{x}dt$$

现在 $\psi(\vec{x}_f t_f)$ 遵守 Schrödinger 方程。

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{x_f}\psi(\vec{x}_f t_f)+i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x}_f t_f)}{\partial t_f}=V(\vec{x}_f t_f)\psi(\vec{x}_f t_f)$$

因为 $\phi(\vec{x}_f t_f)$ 遵守自由粒子方程 $(V=0)$，K_0 必须遵守

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{x_f}K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}t)+i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f}K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}t)=i\hbar\delta(\vec{x}_f-\vec{x})\delta(t_f-t)$$

此即的格林函数，注意到 $\delta(t_f-t)$ 来源于 K_0 对 $\theta(t_f-t)$ 的定义。K_0 传播子即为 Schrödinger 方程的格林函数

现在开始计算散射振幅。对于一个散射过程的测量，实验条件为 $t=-\infty$ 时粒子为自由粒子，然后散射，$t=+\infty$ 时又恢复成自由粒子。这是一个难点，因为一个自由粒子是由平面波描述的，也就是说会全空间分布，包括 $V(\vec{x})$ 的中心。故这个粒子不可能是自由的。要解决这个问题，绝热假设被引入。势能V被缓慢地开启然后关闭，故 $t=\pm\infty$ 时，这个粒子是自由粒子。V不可以变化地太快，不然由于V对t不独立，导致散射中心会吸收/放出能量，不可以发生。

回到散射问题，初条件是平面波：$\psi_{in}(\vec{x}_i t)$

设对于大的 $-t$，$V\to 0$，t_i 比一切更小，取玻恩一阶近似，得

$$\psi^{(+)}(\vec{x}_f t_f)=\int K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)\,d\vec{x}_i-\frac{i}{\hbar}\int K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}t)V(\vec{x},t)$$
$$K_0(\vec{x}t;\vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)\,d\vec{x}\,d\vec{x}_i\,dt$$

(+)号代表它对应于一个 $t=-\infty$ 的自由粒子，故包括"推迟"传播子 $K_0(\vec{x}t;\vec{x}'t')$，在 $t'>t$ 时消失。同样可以写出一个 $\psi^{(-)}(\vec{x}t_i)$，包括 $t=\infty$ 时自由波(ψ_{out})，以及一个"超前"传播子 $K_0(\vec{x}t;\vec{x}'t')$，在 $t'<t$ 时消失。

振幅

我们对于一个最后的并带有确定动量的粒子感兴趣，如 ψ_{out}，这个被叫做散射振幅 S，并且这是波函数的叠加

$$S=\int\psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)\psi^{+}(\vec{x}_f t_f)\,d\vec{x}_f$$

$$=\int\psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)\,d\vec{x}_i\,d\vec{x}_f$$

$$-\frac{i}{\hbar}\int\psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)K(\vec{x}_f t_f;\vec{x}t)V(\vec{x},t)K_0(\vec{x}t;\vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)\,d\vec{x}_f\,d\vec{x}\,d\vec{x}_i\,dt$$

$$=\int\psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)\phi(\vec{x}_f t_f)\,d\vec{x}_f$$

$$-\frac{i}{\hbar}\int\psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)K(\vec{x}_f t_f;\vec{x}t)V(\vec{x},t)K_0(\vec{x}t;\vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)\,d\vec{x}_f\,d\vec{x}\,d\vec{x}_i\,dt$$

其中 $\phi(\vec{x}_f t_f)$ 与 $\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)$ 一样，是平面波。若初动量与末动量是 $\vec{p}_i=\hbar\vec{k}_i$，$\vec{p}_f=\hbar\vec{k}_f$，我们由盒归一化，

$$\psi_{in}(\vec{x}t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i\cdot\vec{x}-E_i t)\right]$$
$$\psi_{out}(\vec{x}t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f\cdot\vec{x}-E_f t)\right]$$

其中$E=\frac{p^2}{2m}$，τ是盒体积，将上式代入 ↓，并利用归一化条件：

$$\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}d\vec{x}=(2\pi)^3\delta(\vec{q})$$

为方便起见令$\tau=(2\pi)^3$，得到

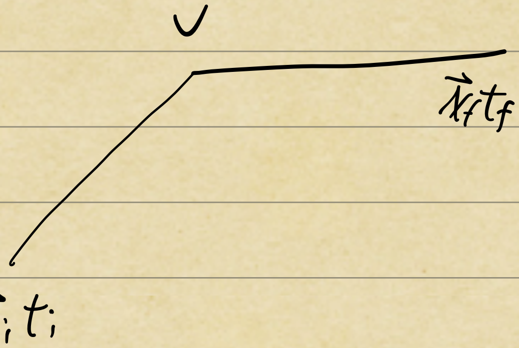
$$S_{fi}=\delta(k_i-k_f)-\frac{i}{\hbar}\int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)\,K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}t)\,V(\vec{x},t)\,K_0(\vec{x}t;\vec{x}_i t_i)\,\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)\,d\vec{x}_f\,d\vec{x}\,d\vec{x}_i\,dt$$

上式

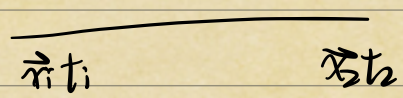
散射振幅即为S矩阵的一个元素(4)，其中第一项对应于无相互作用，为恒等，
因此在S矩阵中，相互作用被展现于第二项。从"in"状态到"out"状态的振幅如下：

$$A=-\frac{i}{\hbar}\int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)\,K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}t)\,V(\vec{x},t)\,K_0(\vec{x}t;\vec{x}_i t_i)\,\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)$$

用费曼规则表示散射振幅：

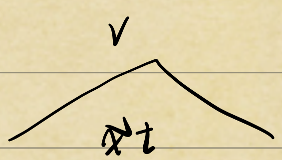


拆开



$K_0(\vec{x}_2 t_2;\vec{x}_1 t_1)$

Feynman rule



$-\frac{i}{\hbar}V(\vec{x}t)$；对$x$和$t$积分

另外，我们在图的首尾乘上 ψ_{in} 和 ψ_{out}^* 并对空间变量作积分. 因此，二阶的振幅可写成

$$A^{(2)}=\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2\int \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f)\,K_0(\vec{x}_f t_f;\vec{x}'t')\,V(\vec{x}'t')\,K_0(\vec{x}'t';\vec{x}t)\,V(\vec{x}t)\,K_0(\vec{x}t;\vec{x}_i t_i)\,d\vec{x}_i\,d\vec{x}\,dt\,d\vec{x}'dt'd\vec{x}_f$$

这里我们把 Feynman rule 转到动量空间

$$K(\vec{p}_1 t_1;\vec{p}_0 t_0)=\int \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_1\cdot\vec{x}_1\right)K(\vec{x}_1 t_1;\vec{x}_0 t_0)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}_0\cdot\vec{x}_0\right)d\vec{x}_0\,d\vec{x}_1$$

自由传播子 $K_0(\vec{x}_1 t_1;\vec{x}_0 t_0)$ 由3维推广下

$$K_0(\vec{x}_1 t_1;\vec{x}_0 t_0)=\theta(t_1-t_0)\left[\frac{m}{i\hbar(t_1-t_0)}\right]^{3/2}\exp\left[\frac{im(\vec{x}_0-\vec{x}_1)^2}{2\hbar(t_1-t_0)}\right]$$

K_0 变为

$$K_0(\vec{p}_1 t_1;\vec{p}_0 t_0)=\theta(t_1-t_0)\left[\frac{m}{i\hbar(t_1-t_0)}\right]^{3/2}\int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0\cdot\vec{x}_0-\vec{p}_1\cdot\vec{x}_1)\right]$$

$$\times\exp\left[\frac{im(\vec{x}_0-\vec{x}_1)^2}{2\hbar(t_1-t_0)}\right]d\vec{x}_0\,d\vec{x}_1$$

引入如下变量：

$$\vec{x}=\vec{x}_0-\vec{x}_1,\quad \vec{X}=\vec{x}_0+\vec{x}_1,\quad \vec{p}=\vec{p}_0-\vec{p}_1,\quad \vec{P}=\vec{p}_0+\vec{p}_1$$

故

$$2(\vec{p}_0\cdot\vec{x}_0-\vec{p}_1\cdot\vec{x}_1)=\vec{P}\cdot\vec{x}+\vec{p}\cdot\vec{X}$$

Jacobi 行列式为 $\frac{1}{8}$，故

$$K_0(\vec p_1 t_1; \vec p_0, t_0) = \theta(t_1-t_0)\left(\frac{2\alpha}{i}\right)^{3/2}\frac{1}{8}\int \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\vec p\cdot\vec X\right) d\vec X \int \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\vec P\cdot\vec x\right) e^{i\alpha\vec x^2} d\vec x$$

其中 $\alpha = \frac{m}{2\hbar}(t_1-t_0)$

$$K_0(\vec p_1 t_1; \vec p_0 t_0) = (2\pi\hbar)^3\theta(t_1-t_0)\delta(\vec p_0-\vec p_1)\left(\frac{2\alpha}{i}\right)^{3/2}\int\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\vec P\cdot\vec x + i\alpha\vec x^2\right)d\vec x$$

注意到 $\vec p_0$ 与 $\vec p_1$ 可相互替换，故 $\vec P^2 = 4\vec p_0^{\,2}$

$$K_0(\vec p_1 t_1; \vec p_0 t_0) = (2\pi\hbar)^3\theta(t_1-t_0)\delta(\vec p_0-\vec p_1)\exp\left[\frac{i\vec p_0(t_1-t_0)}{2m\hbar}\right]$$

代入 K_0，得

$$K_0(\vec x_1 t_1; \vec x_0 t_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6}\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec p_1\cdot\vec x_1\right) K_0(\vec p_1 t_1;\vec p_0 t_0)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec p_0\cdot\vec x_0\right)d\vec p_1 d\vec p_0$$

$$= \theta(t_1-t_0)\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\vec p\cdot(\vec x_1-\vec x_0) - \frac{\vec p^2}{2m}(t_1-t_0)\right]\right\}d\vec p$$

$$K_0(\vec p_1 E_1; \vec p_0 E_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}E_1 t_1\right)K_0(\vec p_1 t_1;\vec p_0 t_0)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0 t_0\right)dt_0\,dt_1$$

$$=(2\pi\hbar)^3\delta(\vec p_0-\vec p_1)\int\theta(\tau)\exp\left(\frac{-ip_1^2}{2m\hbar}\tau\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_1t_1-E_0t_0)\right]dt_0\,dt_1$$

其中 $\tau = t_0 - t_1$，将 τ 和 t_0 看作相互独立的变量，则给出

$$K_0(\vec p_1 E_1; \vec p_0 E_0) = (2\pi\hbar)^3\delta(\vec p_0-\vec p_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t_0\right]dt_0\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\tau)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(E_1-\frac{p_1^2}{2m}\right)\tau\right]d\tau$$

第一个积分 $(2\pi\hbar)\delta(E_1-E_0)$

对于 $\theta(\tau)$，二阶后

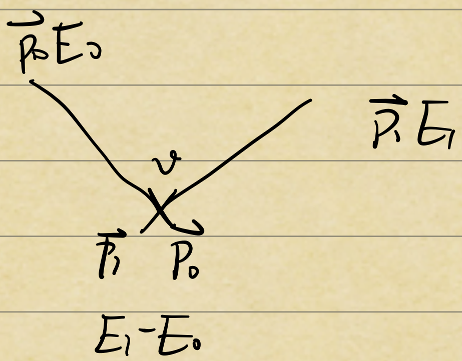
$$\theta(\tau) = \int_0^\infty e^{i\omega\tau}d\tau$$

ω 若为实数，则积分不收敛，ω 必被替换为 $\omega+i\varepsilon$，结果

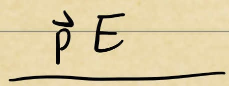
$k_0(\vec{p}_1 E_1; \vec{p}_0 E_0) = (2\pi\hbar)^4 \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1)\delta(E_0 - E_1)\frac{i\hbar}{E_1 - \frac{p_1^2}{2m} + i\varepsilon}$

Fourier 变换后 $V(\vec{x},t)$，有

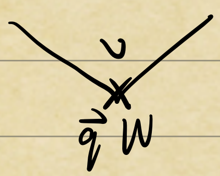
$$V(\vec{x},t) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{q}\cdot\vec{x} - Wt)\right] v(\vec{q}, W)\, d\vec{q}\, dW$$



Feynman rules



$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\frac{i\hbar}{E - \frac{p^2}{2m} + i\varepsilon}$$



$$-\frac{i}{\hbar}(2\pi\hbar)^4 v(\vec{q}, W)$$

能量、动量守恒

Question 被散射的粒子本身会激发对应的场，此时 adiabatic hypothesis 还能否应用？

5A.3 (配方)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx+c)\,dx = \exp\left(\frac{b^2}{4a}+c\right)\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$$

5A.4 (数学归纳法证明)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\lambda\left[(x_1-a)^2+(x_2-x_1)^2+\cdots+(b-x_n)^2\right]\right\}dx_1\cdots dx_n$$

$$= \left[\frac{i^n\pi^n}{(n+1)\lambda^n}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i\lambda}{n+1}(b-a)^2\right]$$