重整化1

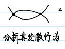
2023年10月7日 19:55

标量场的例子：$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$

树图：

$iM_1 = \quad = -i\lambda$ → 树图只会给出有理函数，不会有 ln.

单圈：(s-channel)



$iM_2 = \quad = \frac{(-i\lambda)^2}{2!}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2}\frac{i}{(p-k)^2}$　　$p = p_1+p_2 = p_3+p_4$.

M_2一定有发散部分，分析其发散行为 $M_2 \sim \int\frac{d^4k}{k^4} \to \int\frac{dk}{k}$. 故应假定为对数发散 $M_2 \sim \ln\frac{s}{\Lambda^2}$. Λ为截断.

↳ log函数（甚至polylog来自于圈图）.

搞出答案的dirty way：因M_2是s的单变量函数，可作：

$$\frac{\partial}{\partial s}M_2 = \frac{p^\mu}{2s}\frac{\partial}{\partial p^\mu}M_2 = \frac{p^\mu}{2s}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2}\frac{-2(p^\mu-k^\mu)}{(p-k)^4}\frac{(-i\lambda)^2}{2!}$$
$$= \frac{i\lambda^2}{2s}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}\frac{(p^2-pk)}{(p-k)^4}$$
$$= -\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\frac{1}{s}$$

（稍后作计算）.

按照上面的分析，积分常数应该保证 $M_2(s) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{s}$. 于是总振幅 $M(s) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\ln\frac{s}{\Lambda^2}$. λ和Λ都不确定.

对比 s_1, s_2 时的振幅，应该有 $M(s_1) - M(s_2) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\ln\frac{s_2}{s_1}$　注意到 $M(s_1)$, $M(s_2)$, s_1, s_2 都可观测，但λ是不知道的，可采取如下方案：

(1) $\lambda_R \triangleq -M(s_0) = \lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\ln\frac{s_0}{\Lambda^2} + \cdots$ 为重整后的耦合常数，这对应特征能标 s_0下的截面，可以观测.

(2) 然后将λ作λ_R的微扰展开：$\lambda = \lambda_R + a\lambda_R^2 + \cdots$

(3). 代回 λ_R定义式：$\lambda_R = (\lambda_R + a\lambda_R^2 + \cdots) + \frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{s_0}{\Lambda^2}(\lambda_R + a\lambda_R^2 + \cdots)^2 + \cdots$

$= \lambda_R + (a + \frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{s_0}{\Lambda^2})\lambda_R^2 + \cdots$　给出 $a = -\frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{s_0}{\Lambda^2}$. 以此类推.

(4). 于是λ就可用可观测的 λ_R表示为：$\lambda = \lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\ln\frac{s_0}{\Lambda^2} + \cdots$

这样一来，任意能标s下的振幅 $M(s)$ 表为：

$$M(s) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\ln\frac{s}{\Lambda^2}$$
$$= -(\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\ln\frac{s_0}{\Lambda^2}) - \frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{s}{\Lambda^2}(\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\ln\frac{s_0}{\Lambda^2})^2$$
$$= -\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\ln\frac{s}{s_0} + \cdots$$

在我们选定的 s_0下，可以精确地测出 $M(s_0)$，进而给出 λ_R，那么整个振幅将都由可观测量表示，我们又可以从 s 预测 $M(s)$ 了.

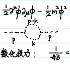
这样定义完后，$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{4!}(\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\ln\frac{s_0}{\Lambda^2})\phi^4$. 相当于 $\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{\lambda_R}{4!}\phi^4 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\phi^4$.　$\delta_\lambda = -\frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\ln\frac{s_0}{\Lambda^2}$.

重整化拉氏量导致的抵消项，不影响物理.

真空极化

考虑标量理论：$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{3!}\phi^3$.

一圈：



$iM_{loop}(p) = \quad = \frac{(ig)^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{(k-p)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$　（暂时不管外线）

(1). 考虑 Feynman参数化技巧：$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx\frac{1}{[A+(B-A)x]^2}$

$$\Rightarrow iM_1 = \frac{g^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\frac{1}{[(k-p(1-x))^2+p^2x(1-x)-m^2+i\epsilon]^2}$$

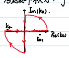
(2). 作 $k^\mu \to k^\mu + p^\mu(1-x)$：$iM_1 = \frac{g^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\frac{1}{[k^2-(m^2-p^2x(1-x))+i\epsilon]^2}$

$$= \frac{g^2}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2-(m^2-p^2x(1-x))+i\epsilon]^2}$$

(3). 后面这个积分需要用正规化手段：

Wick 转动：

考虑如下积分：$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-\Delta+i\epsilon)^n}$. 不妨考虑 $\Delta>0$. 则在 $k_{0+} = \sqrt{\vec{k}^2+\Delta} - i\epsilon$, $k_{0-} = -\sqrt{\vec{k}^2+\Delta} + i\epsilon$ 有极点.



可以取红线所示的围道，给出：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_0}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k^2-\Delta+i\epsilon)^n} = \int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{dk_0}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k_0^2-\vec{k}^2-\Delta+i\epsilon)^n}$

代换：$k_0 \to ik_0$　$= i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_0}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(-k_0^2-\vec{k}^2-\Delta+i\epsilon)^n}$　令 $k_0^2+\vec{k}^2 = k_E^2$

$= i\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{1}{(-k_E^2-\Delta)^n}$

现在可以在4维空间中作球坐标代换，这里不妨推导一下高维的球坐标代换：

(1) 对 d维欧氏空间，有 $\int d^dk = \int d\Omega_d\int k^{d-1}dk$. 为球坐标换元的积分形式.

(2). 对 $\int d\Omega_d$. 注意到：$(\sqrt{\pi})^d = (\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,e^{-x^2})^d = \int d\Omega_d\int_0^\infty dr\,r^{d-1}e^{-r^2} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{d}{2})\int d\Omega_d$.

$\overset{\triangle}{=} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}d(r^2)(r^2)^{\frac{d}{2}}e^{-r^2}$

$\Rightarrow \int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$　例如 $\int d\Omega_4 = 2\pi^2$.

(3). 考虑更普通的积分：$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^{2a}}{(k^2-\Delta)^b} = i(-1)^{a-b}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{\Delta^{b-a-d/2}}\frac{\Gamma(a+\frac{d}{2})\Gamma(b-a-\frac{d}{2})}{\Gamma(b)\Gamma(d/2)}$　这对非整数维的 d 也适用

结合 $\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon)$. 可以将积分放在 $d = 4-2\epsilon$ 维计算，然后令 $\epsilon\to0$ 作展开，即为维数正规化.

现在回到真空极化圈的积分：$iM_1 = \frac{g^2}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2-(m^2-p^2x(1-x))+i\epsilon]^2}$

取 $\Delta = m^2-p^2x(1-x)$. $\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-\Delta+i\epsilon)^2} \xlongequal[d=4-2\epsilon]{a=0\ b=2} i(-1)^{-2}\frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon}}\frac{1}{\Delta^\epsilon}\frac{\Gamma(2-\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2)\Gamma(2-\epsilon)}$

$= \frac{i}{16\pi^2}\Delta^{-\epsilon}\Gamma(\epsilon)$.

利用 $\Delta^{-\epsilon} \sim \Delta^{-\epsilon}\ln\Delta(-\epsilon)$, $\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon)$. 可以看出这里有一个 $\frac{1}{\epsilon}$ 的发散性作为 leading singularity.

作为正规化手段，直接扔掉 $\frac{1}{\epsilon}$ 项. 保留到：$iM_1 = -\frac{ig^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx\ln[m^2-p^2x(1-x)] + \gamma_E)$

$$= -\frac{ig^2}{32\pi^2}\{-2+2\sqrt{-1+\frac{4m^2}{p^2}}\arctan[\frac{p}{4m^2-p^2}] + 2\ln m + \gamma_E\}$$
$$\xlongequal{m\to0} -\frac{ig^2}{32\pi^2}\{-2+i\pi+\ln p^2+\gamma_E\}$$

$\ln p^2 + i\pi \to \ln(-p^2) \overset{\triangle}{=} \ln Q^2$

$$\sim -\frac{ig^2}{32\pi^2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}.$$

$-p^2>0$. 因为p是类空的.

(1). 抛弃了 $2+\gamma_E$：常数可以被吸收进 Λ^2的定义中.　(2) 引入 Λ^2：为了体现截断能标的意义. 也可以用 Pauli-Villars 正规化导出该形式

重整化方案：考虑树图：

$iM^0(p) = (ig)^2\frac{i}{p^2}$

引入圈修正：

$iM'(p) = (ig)^2\frac{i}{p^2}iM_{loop}\frac{i}{p^2} = ig^2\frac{1}{p^2}[-\frac{g^2}{32\pi^2}\ln\frac{-p^2}{\Lambda^2}]\frac{1}{p^2}$

$M(Q) = M^0(Q) + M'(Q) = \frac{g^2}{Q^2}[1 - \frac{1}{32\pi^2}\frac{g^2}{Q^2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} + O(g^4)]$

定义一个与Q有关的"耦合常数"：$\tilde{g}^2 \triangleq g^2/Q^2$. 则 $M(Q) = \tilde{g}^2[1 - \frac{\tilde{g}^2}{32\pi^2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} + O(\tilde{g}^4)]$

接下来，与 ϕ^4理论类似，标定一个 Q_0，使得 $\tilde{g}_R^2 \triangleq M(Q_0)$. 这被称为重整化条件.

$\Rightarrow M(Q_0) = \tilde{g}_R^2 = \tilde{g}^2 - \frac{\tilde{g}^4}{32\pi^2}\ln\frac{Q_0^2}{\Lambda^2} + O(\tilde{g}^6)$.

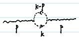
设 $\tilde{g}^2 = \tilde{g}_R^2 + a\tilde{g}_R^4 + \cdots$. 代回得 $\tilde{g}_R^2 = (\tilde{g}_R^2 + a\tilde{g}_R^4 + \cdots) - \frac{(\tilde{g}_R^2 + a\tilde{g}_R^4)^2}{32\pi^2}\ln\frac{Q_0^2}{\Lambda^2} + \cdots$

$= \tilde{g}_R^2 + (a - \frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{Q_0^2}{\Lambda^2})\tilde{g}_R^4 + \cdots$.

$\Rightarrow \tilde{g}^2 = \tilde{g}_R^2 + \frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{Q_0^2}{\Lambda^2} + \cdots$

于是振幅可以写作 $M(Q) = \tilde{g}_R^2 + \frac{1}{32\pi^2}\tilde{g}_R^4\ln\frac{Q_0^2}{Q^2} + O(\tilde{g}_R^6)$. 即为重整化后的结果.

标量QED的真空极化：



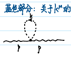
$= (-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i(2k^\mu-p^\mu)}{(k-p)^2-m^2+i\epsilon}\frac{i(2k^\nu-p^\nu)}{k^2-m^2+i\epsilon}$

（暂时不计外腿）.　$= e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k-p)^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}[\underline{4k^\mu k^\nu} + \underline{p^\mu p^\nu} \underline{- 2k^\mu p^\nu - 2k^\nu p^\mu}]$

红色部分：所有的k都会被积掉，而最终结果一定带 μ, ν 裸露指标，故结果一定是 $g^{\mu\nu}$相关，可能含 p, m.

紫色部分：结果必正比于 $p^\mu p^\nu$. 中间计算与 ϕ^3的几乎一致.

蓝色部分：关于 k^μ的奇函数，但积分区域关于 k^μ对称，故一定为 0.



$= 2ie^2g^{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$.

相加，相当于一个传播子 $i\Pi_2^{\mu\nu} = -e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k-p)^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}[-4k^\mu k^\nu - p^\mu p^\nu + 2g^{\mu\nu}[(p-k)^2-m^2]]$

$\Rightarrow \Pi_2^{\mu\nu} = \Delta_1 p^2 g^{\mu\nu} + \Delta_2 p^\mu p^\nu$.

回忆光子传播子 $\langle\Omega|TA^\mu(x)A^\nu(y)|\Omega\rangle \triangleq \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip(x-y)}iG^{\mu\nu}(p)$. 现在考虑对传播子 $G^{\mu\nu}(p)$ 作微扰展开：

$iG^{\mu\nu}(p) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon} \to \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig^{\mu\alpha}}{p^2}i\Pi_{2\alpha\beta}\frac{-ig^{\beta\nu}}{p^2} + \cdots$

$= -i\frac{(1+\Delta_1)g^{\mu\nu} + \Delta_2\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{p^2+i\epsilon}$　$\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}$与ξ-gauge项类似，只是一个规范. 最终因 $\epsilon_\mu M^{\mu\nu} \sim \epsilon_\mu p^\mu = 0$. 满足Ward恒等式.

$= -i\frac{(1+\Delta_1)g^{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon}$

所以现在的问题就是如何算 Δ_1. 即计算如下积分：$\Pi_2^{\mu\nu} = ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-4k^\mu k^\nu + 2g^{\mu\nu}[(k-p)^2-m^2+i\epsilon]}{[(k-p)^2-m^2+i\epsilon][k^2-m^2+i\epsilon]}$

(1). Feynman参数化：

$$\Pi_2^{\mu\nu} = ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-4k^\mu k^\nu + 2g^{\mu\nu}[(k-p)^2-m^2+i\epsilon])\int_0^1 dx\frac{1}{[(k-p(1-x))^2+p^2x(1-x)-m^2+i\epsilon]^2}$$

作 Shift：$k^\mu \to k^\mu + p^\mu(1-x)$. 测度保持不变. $k^\mu k^\nu \to k^\mu k^\nu$. 而 $p^\mu p^\nu$项消掉. $p^\mu k^\nu$项消掉.

$(k-p)^2 \to (k-xp)^2. \to k^2 + x^2p^2$. 因为 $\vec{k}\cdot\vec{p}$ 同样应该去掉.

$$\Rightarrow \Pi_2^{\mu\nu} = 2ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}[k^2+x^2p^2-m^2+i\epsilon])\int_0^1 dx\frac{1}{[k^2+p^2x(1-x)-m^2+i\epsilon]^2}$$
$$= 2ie^2\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}k^2 + g^{\mu\nu}(x^2p^2-m^2)}{[k^2+p^2x(1-x)-m^2+i\epsilon]^2}$$

蓝色. 由于 $k^\mu k^\nu$积出来一定为 $g^{\mu\nu}$. 可以配平量纲后等效为 $k^\mu k^\nu \sim \frac{1}{c}k^2g^{\mu\nu}$. 与 $g_{\mu\nu}$缩并可知 $c = d$（即时空维数）.

$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-2k^\mu k^\nu}{[k^2+p^2x(1-x)-m^2+i\epsilon]^2} \to -\frac{2}{d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^2}{[k^2-\Delta]^2}g^{\mu\nu} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{\Delta^{1-d/2}}\Gamma(1-\frac{d}{2})$.

取 $d = 4-2\epsilon$.　$I_1 = \frac{i}{16\pi^2}\Delta^{1-\epsilon}\Gamma(\epsilon-1) \sim \frac{i\Delta}{16\pi^2}[-\frac{1}{\epsilon} + (\gamma_E - 1 + \ln\Delta) + O(\epsilon)]$

红色. $\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^2}{[k^2-\Delta]^2}g^{\mu\nu} = -\frac{d}{2}I_1 = \frac{i\Delta}{16\pi^2}[\frac{2}{\epsilon} + (1-2\gamma_E - 2\ln\Delta) + O(\epsilon)]$

△ 小心：因为 4-2ε 那里还是有一个抵消项.

绿色. $g^{\mu\nu}(x^2p^2-m^2)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2-\Delta]^2} = g^{\mu\nu}(x^2p^2-m^2)\frac{i}{16\pi^2}[\frac{1}{\epsilon} + (-\gamma_E - \ln\Delta) + O(\epsilon^2)]$

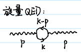
加起来有 $\Pi_2^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx[-\gamma_E\Delta - \Delta\ln\Delta - (x^2p^2-m^2)\ln\Delta]g^{\mu\nu}$（去掉所有常数项）. 其中 $\Delta = p^2x(x-1) + m^2$.

$\sim \frac{e^2}{8\pi^2}p^2g^{\mu\nu}\int_0^1 dx[x(2x-1)\ln[p^2x(x-1)+m^2]]$　（取 $m\to0$ 的极限）.

$= \frac{e^2}{8\pi^2}p^2g^{\mu\nu}(-\frac{4}{9} + \frac{1}{6}\ln(-p^2)) = -\frac{e^2}{48\pi^2}p^2g^{\mu\nu}[\frac{8}{3} + \ln\frac{1}{Q^2}]$. 即传播子的主部.

补足 leading singularity. 有 $\Pi_2^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{48\pi^2}(p^2g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)(\frac{2}{\epsilon} + \ln\frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2} + \frac{8}{3})$. with $m \ll Q$.

旋量QED：



$= -(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{(p-k)^2-m^2}\frac{i}{k^2-m^2}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{k}-\not{p}+m)\gamma^\nu(\not{k}+m)]$

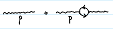
费米圈的负号.

$\Rightarrow \Pi_2^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{12\pi^2}p^2g^{\mu\nu}(\frac{2}{\epsilon} + \ln\frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2} + \frac{5}{3} + O(\epsilon))$. 在 $m \ll Q$时. 其中 $\tilde{\mu} = 4\pi e^{-\gamma_E}\mu$. 而μ是作为无量纲化e的存在：$e \to \mu^{\frac{4-d}{2}}e$

原始版本是：$\Pi_2^{\mu\nu} = \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}}(p^2g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\Gamma(2-\frac{d}{2})\mu^{4-d}\int_0^1 dx\,x(1-x)(\frac{1}{m^2-p^2x(1-x)})^{2-\frac{d}{2}}$

$\Rightarrow i\Pi_2^{\mu\nu} = i(p^2g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)e^2\Pi_2(p^2)$. 其中 $\Pi_2(p^2) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)[\frac{2}{\epsilon} + \ln\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2-p^2x(1-x)}]$　这是展开的头两阶.

传播子可以修正为：



$iG^{\mu\nu} = \quad + \quad = -i\frac{g^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-i}{p^2}i\Pi_2^{\mu\nu}\frac{-i}{p^2} + \cdots$　（$p^\mu p^\nu$项因Ward恒等式略去）.

$= -i\frac{[1-e^2\Pi_2(p^2)]}{p^2}g^{\mu\nu} + \cdots$

原先的传播子 $iG^{\mu\nu} = -i\frac{g^{\mu\nu}}{p^2} \to \tilde{V}(p) = \frac{e^2}{p^2}$　修正后 $\tilde{V}(p) = \frac{e^2}{p^2}[1-e^2\Pi_2(p^2)]$. 我们可以对 e^2作重整化：

(1). 取某一特定 p_0处. $\tilde{V}(p_0) \equiv e_R^2p_0^{-2}$.　即 $e_R^2 = p_0^2\tilde{V}(p_0) = e^2 - e^4\Pi_2(p_0^2)$.

(2). 对 e^2 作微扰展开：$e^2 = e_R^2 + ae_R^4 + \cdots$. 则有：$e_R^2 = e_R^2 + ae_R^4 - (e_R^2 + ae_R^4 + \cdots)^2\Pi_2(p_0^2)$

$\Rightarrow a = \Pi_2(p_0^2)$.

(3) 从而 $\tilde{V}(p) = \frac{e^2}{p^2} = \frac{1}{p^2}[(e_R^2 + \Pi_2(p_0^2)e_R^4 + \cdots) - (e_R^2 + \Pi_2(p_0^2)e_R^4 + \cdots)^2\Pi_2(p^2)\cdots]$

$= \frac{e_R^2}{p^2}[1 + e_R^2(\Pi_2(p_0^2) - \Pi_2(p^2)) + \cdots] = \frac{e_R^2}{p^2}[1 + \frac{e_R^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)\ln\frac{m^2-p^2x(1-x)}{m^2-p_0^2x(1-x)}]$. 即为一阶圈修正.

这个修正可以分别给出如下的物理：

(1) 小动量. 即 $|p^2| \ll m$. 此时将 p_0取为0. 可得 $\int_0^1 dx\,x(1-x)\ln\frac{m^2-p^2x(1-x)}{m^2} \sim -\frac{1}{30}\frac{p^2}{m^2}$.

从而 $\tilde{V}(p) = \frac{e_R^2}{p^2} - \frac{e_R^4}{60\pi^2m^2} = -\frac{e_R^2}{4\pi r} - \frac{e_R^4}{60\pi^2m^2}\delta(r)$. 这被称为 Uehling 项. 经典上看像是一个刚球接触势.

在NRQM中. ΔE可以表征为 $\Delta E = \langle\psi_j|\Delta V|\psi_i\rangle$. 考虑到仅 L=0 时可能有 r=0 的 ψ(r). 故 L=0和 L=1 会从关于j 简并而劈裂.

对 $2S_{1/2}$. ΔE = -27MHz. 这是Lamb位移的一部分

如果不做近似. 则 V(r) 相当于直接对上面式子做Fourier变换（注意要换回平面直角坐标）. 比较难算.

(2). 大动量. $|p^2| \gg m$. 此时能标比较高. $\tilde{V}(p^2) = \frac{e_R^2}{p^2} + \frac{e_R^4}{p^2}\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)\ln(1-\frac{p^2x(1-x)}{m^2}) + \cdots$

$\sim \frac{e_R^2}{p^2} + \frac{e_R^4}{p^2}\frac{1}{2\pi^2}\ln\frac{-p^2}{m^2}\int_0^1 dx\,x(1-x) + \cdots$

△ 这里把ln提出来会导致积分多一个常数. 但我们直接略去了.

$= \frac{e_R^2}{p^2}(1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2}\ln\frac{-p^2}{m^2})$

因为大对数下 e_R^4项的常数可以忽略不计.

在能标 Q^2和 Q_0^2 下. 有：$Q^2\tilde{V}(Q) - Q_0^2\tilde{V}(Q_0) = \frac{e_R^2}{12\pi^2}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}$

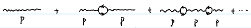
在特定能标下. 可作重定义：$e_{eff}^2 = e_R^2(1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2}\ln\frac{Q^2}{m^2})$. 为所谓有效电荷. 一般取 $Q^2 = m^2$时的 e_{eff}^2作为 e_R^2的取值.

考虑到精细结构常数：$e_{eff}^2/4\pi = \alpha \Rightarrow \alpha(Q^2) = \frac{1}{137}(1 + 0.00077\ln\frac{Q^2}{m^2})$. m取为电子质量.

(3) Landau 极点：大约在 $Q \sim 10^{286}$eV. 圈修正将无法再视作微扰. 大Q作Fourier变换对应很小的r. 该尺度下微扰论方法失效. 该能标称为理论的Landau极点.

跑动耦合：

如果考虑各阶费米圈对传播子的修正. 则：



$iG^{\mu\nu} = \quad + \quad + \quad + \cdots$

这将导致刚才的势能修正变为：$\tilde{V}(Q) = -\frac{e_R^2}{Q^2}[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2}\ln\frac{Q^2}{m^2} + (\frac{e_R^2}{12\pi^2}\ln\frac{Q^2}{m^2})^2 + \cdots]$

$= -\frac{1}{Q^2}[\frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2}\ln\frac{Q^2}{m^2}}]$.

有效荷可以写为：$e_{eff}^2(Q) = e_R^2(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2}\ln\frac{Q^2}{m^2})^{-1} \Rightarrow \frac{1}{e_{eff}^2} = \frac{1}{e_R^2} - \frac{1}{12\pi^2}\ln\frac{Q^2}{m^2}$.

如果考虑在任意能标附近展开：$\frac{1}{e_{eff}^2} = \frac{1}{e_{eff}^2(\mu)} - \frac{1}{12\pi^2}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}$.

对μ求导. 有：$0 = -\frac{2}{e_{eff}^3(\mu)}\frac{de_{eff}}{d\mu} + \frac{1}{6\pi^2}\frac{1}{\mu}$.　$\Rightarrow \mu\frac{de_{eff}}{d\mu} = \frac{1}{12\pi^2}e_{eff}^3$. 这被称为重整化群方程

$\beta(e_{eff}) = \mu\frac{de_{eff}}{d\mu}$ 称为β函数.